

1740

Metternich

Gesch. p. 1485

Geschenk von Dr. Lang-

Hunc Librum pro praemio

Ego

Petrus Hotz grosostheimensis

accepi

Aschaffenburgi trigesimo

Novembris

1791

J. Valentin Langmantel 1824

Ma Lector

Reissing

Ehem Gymnas Dir.

<3661647676016

Anfangsgründe
der
Geometrie
und
Trigonometrie
zum
Gebrauche für Anfänger bei dem Unterrichte.

Aufgesetzt
von

M. Metternich,
Doktor der Philosophie und öffentlicher Lehrer der Mathematik und Physik auf der Universität zu Mainz; Mitglied der kurfürstl. Akademie nützl. Wissenschaften zu Erfurt; Lehrer in der hiesigen kurfürstl. Normalschule.



Mit gnädigst bewilligter Censurfreiheit.

Mainz,
verlegt auf Kosten des Schulfonds;
gedruckt in der kurfürstl privil. Buchdruckerei des St. Rochus-Hospitals, 1789.

Die Geometrie würde kein Vorbild der vollkommensten Lehrart bleiben, wenn man sich verstatten wollte, Sätze, deren Wahrheit nicht augenscheinlich ist, in ihr unbewiesen anzunehmen.

Kästner, in der Vorrede zum Iten Th. der math. Anfangsgründe.

Dem
Hochwürdigsten Fürsten
und Herrn
Herrn
Friderich Karl Joseph,
des heil. Stuhls zu Mainz
Erzbischoffe,
des heil. R. R. durch Germanien
Erzkanzler
und
Kurfürsten,
Bischoffe und Fürsten
zu Worms rc. rc.
Seinem
gnädigsten Herrn
weihet
in tiefester Ehrfurcht
dieses Werk
der Verfasser.

Vorrede.

Als ich vor etwa zwölf Jahren zu einem Lehramte in der hiesigen Normalschule ernannt wurde, und unter andern auch, Rechenkunst und Geometrie, nach dem **Wolfischen** Lehrbuche vorzutragen den Auftrag erhielt, so bemerkte ich bald die Unzulänglichkeit des Buches zu diesem Zwecke, vorzüglich in der Rechenkunst. In der Geometrie traf ich nicht selten, weil ich itzt schärfer über die Sache nachdenken mußte, als ehedem, da ich nach dem Buche Unterricht erhielt, auf Unvollständigkeiten in den Beweisen. Ich erfuhr nachher, daß schon andere vor mir diese Bemerkungen gemacht hatten. Ich gab bald hernach eine Rechenkunst zum Drucke, weil auch damal so ein Buch in den Trivialschulen, wozu ich in diesem Fache die Lehrer vorzubereiten hatte, ein Bedürfnis war. Diesem Rechenbuche gab ich bei folgenden Auflagen immer mehr Vollständigkeit, so, daß es bei der neuesten vormjährigen Auflage die, zur Geometrie erfoderliche Vorbereitung zulänglich erhalten hat, und kann

* nun

nun mit diesen geometrischen Anfangsgründen die sogenannte reine Mathematik ausmachen.

Beim Lehrvortrage der Geometrie nach dem Wolfischen Lehrbuche bediente ich mich mehrerer Jahre eigener Hefte, worinn ich das Lückenhafte hier und da zu ergänzen suchte, und so entstand nach und nach ein ganz eigener Aufsatz über die Geometrie.

Die Frage, warum ich doch die ziemlich große Zahl der geometrischen Lehrbücher, und worunter sich die von Kästner und Karsten als die Vortreflichsten schon lange ausgezeichnet haben, noch mit Einem vermehre? zumal, da ich so wenig Neues, oder neu Berichtigtes hierinn liefere, und nach dem dermaligen Zustande dieser Wissenschaft auch nur liefern konnte; diese Frage that ich mehrmal an mich, ehe ich mich entschloß, den Aufsatz zum Drucke zu geben; aber ich glaube sie, wenigstens zu meiner Rechtfertigung, so beantworten zu können: In den hiesigen untern Schulen wird durchgängig nach meinem Rechenbuche der Unterricht in diesem Fache gegeben; in den Real- und lateinischen Mittelschulen wird auch Geometrie gelehrt,

die die Lehrer nach eigenen Heften gewöhnlich vortragen. Der Wunsch verschiedener dieser Lehrer, und ihre, und anderer Auffoderung, meiner Rechenkunst eine Geometrie beizufügen; dann der Umstand, daß es immer der Wissenschaft nachtheilig ist, wenn so nach Heften gelehrt wird, die meistens Bruchstücke sind, und vom abschreibenden Schüler nicht selten noch ganz verunstaltet werden; endlich auch, um mich selbst von dem Vorwurf zu rechtfertigen, den man, (und das nicht so ganz mit Unrechte) gewöhnlich den Lehrern macht, die nach Heften Vortrag halten, als giengen sie in der Wissenschaft Schleichwege; dieses alles brachte mich zu dem Entschluße, gegenwärtigen Aufsatz drucken zu lassen.

Ich habe beim Vortrage möglichste Deutlichkeit, und geometrische Schärfe in den Beweisen zu erzielen gesucht; jedoch die nöthige Kürze niemal außer Acht gesetzt. Wegen dem letzteren Gesichtspunkte werde ich vermutlich ein getheiltes Urtheil zu gewärtigen haben; der Anfänger wird nämlich an verschiedenen Stellen mehr Auseinandersetzung wünschen, da, wo vielleicht der geübtere Geometer die nöthige Kürze schon vermißt. Ich denke, die Entscheidung muß aus der

Sache, und nicht aus der Hinsicht auf flüchtige, zum stillen anhaltenden Nachdenken gar nicht anzugewöhnende Köpfe, für die es eigentlich gar keine Geometrie giebt *), genommen werden. Der geometrische Vortrag muß den höchsten Grad der Uiberzeugung gewähren; das kann er aber auch, wegen der vollständigsten Gewisheit seiner Vordersätze; daher muß der Gang des Vortrages genaue Anwendung der logischen Regeln seyn; weil ohne diesen Gang der Verstand niemal vollständige und helle Uiberzeugung erhält. Ist man aber wohl im Stande, eine ganze und leicht

*) Nach dem Zeugnisse des **Proklus** in seinen Erläuterungen über Euklids Geometrie, soll der König **Ptolomäus Lagus** den Euklid ersucht haben, ihm (dem Könige) Lehrvortrag in der Geometrie zu halten. Euklid habe geantwortet: "Das kann „nicht seyn, denn für Könige giebt es keine Geo„metrie". Da mag sich wohl Euklid die mannigfaltigen Geschäfte gedacht haben, die Könige zu sehr zerstreuen, als daß sie sich mit der, zur Erforschung geometrischer Wahrheiten allerdings nöthigen, ungestörten Aufmerksamkeit, der Sache widmen könnten. Zerstreuung ists nun auch bei dem flüchtigen Anfänger; und daher giebt es auch keine Geometrie für ihn; aber wo ist die Nothwendigkeit, daß er sich zerstreuen müße?

leicht umfassende Uibersicht der Vordersätze zu haben, die man doch beim logischen Schluße haben muß, wenn solche Säze, durch Wortreichthum, durch Eintragung neuer, zur Sache zwar nicht unschicklicher, die Schlußkraft aber gar nicht befördernder Nebenbegriffe, zuweit von ein ander trennt? Dem Anfänger wird durch solchen reichen Vortrag das Geschäfte beim eigenen Nachdenken noch gemacht, die Hauptbegriffe, worauf die Wahrheit beruht, von den Nebenbegriffen zu söndern; und wird ihn da die Geduld nicht verlassen? So verdirbt ein weitschichtiger Vortrag in der Geometrie alles. Ich muß hier gestehen, daß es mir kaum möglich war, auszuharren, wenn ich in des Herrn v. Segners vollständigen Vorlesungen über Rechenkunst und Geometrie, einige Beweise las.

Die mathematischen Lehrbücher müßen schon alles in ihrem Vortrage haben, was zu dem Ganzen der Sache gehört; der Lehrer braucht nichts zuzusetzen, wenn es nicht etwa die wörtliche Hersagung des Satzes ist, der nur durch die §§Zahl angeführt wird; dann etwa hie und da die abgekürzen Schlüße durch Zusetzung der ausgebliebenen Mittelsätze ergänzt. Es könnte viel-

leicht auch oft gut seyn, wenn die Zuhörer bei den Lehrsätzen, aufmerksam auf die Wahl der Vordersätze gemacht würden; so, warum man eben diese oder jene Linie oder Ebene lege. Dergleichen Linien oder Ebenen sind nämlich die Hilfsmittel, daß man den zu erweisenden Satz, einem andern, anderswo schon erwiesenen Satze, ähnlich mache. An schicklichen Beispielen, an Vorzeigung der Anwendung eines Satzes (wo das nämliche thunlich ist), mag man immer soweit gehen, als man will, wenn erst einmal die Wahrheit des Satzes durch den gedrängten Vortrag begriffen ist.

Bei dieser Gelegenheit glaube ich mich mit ein Paar Worten über die Meinung, daß der geometrische Vortrag für junge Anfänger müße geändert werden, erklären zu müßen. Man giebt das Mittel von Herabstimmung des Vortrages an, ohne recht zu wissen, in welcher Bedeutung dieses Mittel beim geometrischen Vortrage könne gebraucht werden. Daß man in der Geometrie der Ordnung und Schärfe nichts vergeben dürfe, ist so wahr, als man beim Gegentheile sich nicht anmaßen darf, Geometrie lehren zu wollen. Wer aber spielen will, der mag es

mit

mit einer Puppe thun, mit geometrischen Figuren und Begriffen geht das einmal nicht an. Und noch über dieses erzeugt ein solcher versinnlichter Vortrag den gewissen Nachtheil, daß der Schüler für künftige schärfere Prüfung seiner erspielten geometrischen Sätze keinen Sinn mehr haben wird. Hieher schickt sich eine Stelle aus der Vorrede, die der Hr. Prof. Tetens seiner vortreflichen Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, vorsetzte, sie ist diese: "Ich schätze den Hang zur Popularität in den Wis„senschaften sehr, sehe ihn als einen Vorzug un„serer Zeit an, liebe ihn auch in der Mathema„tik. Aber kann man's läugnen, daß er wohl „gelenkt, und in bestimmten Grenzen gehalten „werden müße, wenn nicht Selbstgenügsamkeit „an Elementarkenntnissen, und Geringschätzung „des gründlichen Wissens durch ihn veranlaßt „werden soll? Hat man nicht auch in der Ma„thematik die Folgen zu befürchten"? Der Vortrag für junge Anfänger bleibt also nothwendig der nämliche, wie er für etwas geübtere Denker wäre. Hat der Lehrer die Gabe der Deutlichkeit und die Geduld, das Vorgetragene mehrmal zu wiederholen, so wird er seinen Zweck erreichen, wenn anders seinen Schülern die Gabe des Be-

greifens nicht versagt ist; in welchem schlimmen Falle es für sie auch keine Geometrie giebt. Sind Anfänger in der Arithmetik schon an richtiges Denken gewöhnt; wird nie ein Sprung im Beweisen gemacht: so haben sie die zur Geometrie gehörige Geistesstimmung schon; sie werden mit dem Vortrage immer vertrauter, und kommen endlich zum Ziele; hievon habe ich mehr, als eine Erfahrung.

Man nennt Sätze schwer zu begreifen, deren Wahrheit aus einer Kette von Schlüßen begriffen werden muß. Dieser Zusammenhang aber ist so wesentlich, als bei einer unternommenen Trennung die Sache gar nicht mehr die bleibt, die sie war. Freilich ist zusammenhängendes Denken nicht die Sache der meisten Anfänger; allein sollen sie denn niemal daran gewöhnt werden?

Es ist allgemein anerkannt, daß der geometrische Vortrag den Verstand schärfe, und an richtiges zusammenhängendes Denken gewöhne, nebst dem, daß er auch noch eine Menge unmittelbar für's gemeine Leben brauchbare Lehren enthält. Diese Vortheile dächte ich, wären so geringfügig nicht; verdienten daher auch nicht so vernachläßigt zu werden, als es die meisten Studirenden zu thun pflegen. Was sind doch die so

ge-

genannten Brodstudien, die faktischen und andere positiven Kenntnisse dem ungeübten, oder gar schiefen Denker anders, als das scharfe Messer in der Hand des Kindes! Der Vorwurf, daß die Geometrie schwer zu erlernen sey, kann nur von Leuten gemacht werden, deren angewöhntes Denken von jeher nur Stückwerk war; man versuche es, sich an die allein brauchbare Denkart: die Dinge und ihre Verhältnisse im Zusammenhange zu überschauen, und so erhält man die gehörige vorbereitete Geistesstimmung zu den geometrischen Lehren, die fast die einzigen sind, die dem Menschen ganz beruhigende Uiberzeugung geben. Außer der Erkenntnis reiner Wahrheit, giebt es für denkende Wesen kein dauerhaftes Vergnügen.

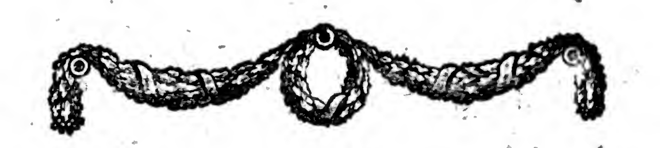
Ich habe mit Vorbedacht die Trigonometrie der Kugeldreiecke (sphärische Trigonometrie) nicht beigefügt, und so die Lehre von Kugelschnitten nicht ausführlich vorgetragen, weil ich glaube, die eigentliche Stelle, wohin diese Kapitel gehören, sey unmittelbar vor der Astronomie. Kommen Anfänger in ihrem Kurse bis zur Astronomie, so sind doch gewöhnlich solche Lehren, die sehr weit vorher giengen, wieder zum Theile vergessen; auch wollte ich es nicht wagen, die Geduld der Anfänger durch einen Vortrag, nicht ganz leichter Säze, dergleichen

chen mehrere in der sphärischen Trigonometrie vorkommen, auf die Probe zu stellen, wo ich doch gewiß in diesem Buche keine weitere Anwendung solcher Lehren zeigen konnte.

Angenehm wird es mir seyn, wenn Kenner das Buch werth halten, mir ihre gegründete Meinung zu sagen. Aber mit Urtheilen, die sich nur auf den äußern Schnitt, z. B. daß die Uiberschriften der §§ mit Lehrsatz, Zusatz u. d. g. nur Dinge wären, die den Raum ohne Noth vergrößerten, wie derlei bei der Erscheinung meiner Rechenkunst von einem gewissen Rezensenten gemacht worden, der sonst nichts Erhebliches zu tadeln wußte, wünschte ich, das Publikum, und mich zu verschonen; weil sie zu wenig Belehrendes enthalten. Ich habe mich auch aus diesem Urtheile nicht überzeugen können, daß solche Benennungen unnütze, und des Raumes, den sie einnehmen, unwerthe Dinge wären; habe diese Anstöße also wieder beibehalten. Hat der Anfänger einmal die Begriffe dieser Rubriken, wie ich solche in einer Einleitung zur Rechenkunst gegeben habe, so weiß er doch nun auch sogleich, was der Vortrag eines jeden Satzes eigentlich beziele. Und wenn ein Wort den Gesichtspunkt des Anfängers richtig stellen kann, so ist doch auch das Wort seiner Stelle werth. Mainz im Brachm. 1789.

Innhalt
der Hauptabschnitte.

Von



Von der geometrischen Ausdehnung überhaupt.

§. 1. Ein jeder Körper, von dessen Daseyn uns unsere Sinne überzeugen, besteht aus nebeneinander liegenden Theilen, und diese Nebeneinanderlage giebt uns den Begriff von seiner Ausdehnung. Man sagt in diesem Sinne, er nehme einen gewissen Raum ein. Man denke sich einen Klumpen, wie ihn uns die Natur oder Kunst giebt, mit seiner endlichen (aufhörenden) Ausdehnung, und so wird man leicht das äußerste an ihm, seine Grenze, begreifen. Man denke nun nicht mehr an den Stoff, der den Körper zu einem solchen machte, nur an dessen Ausdehnung (Raumeinnehmung); und so hat man den Begriff vom geometrischen Körper.

§. 2. Grundsätze. I. Da der geometrische Körper mit dem Raume, den er einnimmt, ganz einerlei ist, so ist er stetig; das heißt: seine Theile liegen in einer ungetrennten Verbindung so aneinander, daß es zwischen ihnen nichts gebe, das nicht zu dem Körper gehöre.

II. Beim geometrischen Körper läßt sich nicht annehmen, daß man nur eine gewisse Zahl Theile

aus ihm machen könne; man sagt daher: er sei bis ins Unendliche theilbar.

III. Die Grenzen des Körpers können nicht mehr Körper seyn; denn wären sie das, so wären sie auch die Grenze noch nicht; und, weil es beim endlich großen Körper doch Grenzen geben muß, so müßte man von diesen Grenzen abermal Grenze annehmen, und so ohne Ende, welches auf Ungereimtheiten führt. Die Grenze des Körpers heißt Fläche.

IIII. Da überall die Grenzen des Körpers seyn müßen, wo seine Ausdehnung aufhört, und doch nicht mehr körperlich sind (III.) so haben die Grenzen der Körper (Flächen), eine Ausdehnung weniger, als die Körper selbst.

V. Das Aeußerste einer Fläche kann nach eben der Art, wie in (III.) zu schließen, keine Fläche mehr seyn; findet sich aber auch nach (IIII.) überall zu äußerst der Fläche, daher hat diese Grenze eine Ausdehnung weniger als die Fläche, und also zwei weniger, als der Körper. Die Grenze der Fläche heißt Linie.

VI. Die Grenze der Linie heißt: Punkt; und sein Begriff wird von der Linie, nach der nämlichen Art zu schließen, hergeleitet. Beim Punkte nun kann man sich gar keine Ausdehnung mehr denken.

VII. Man sagt daher: die einfachste Ausdehnung ist eine Linie oder Länge; die Fläche dehne sich in Länge und Breite, eigentlich nach zwo Gegenden aus, die man durch Linien bezeichnet; und dabei kann nun die Meinung nicht seyn, als wenn zwo Linien eine Fläche ausmachten. Der Körper muß sich also nach drei Gegenden ausdehnen, die man durch Länge, Breite und Dicke angiebt; wobei wieder gemerkt werden muß, daß zwar die Größe dieser dreifachen Ausdehnung durch Hilfe dieser drei Linien angege-

angegeben werden kann, aber nicht als wenn diese drei Linien die Körperausdehnung ausmachten.

§. 3. Zusatz. Die Möglichkeit, eine jede der obigen drei Ausdehnungen zu theilen, ist klar; weil man sich die Ganzen aus Theilen bestehend denken kann. Es sind aber

I. Die Grenzen an den Theilen einer Linie Punkte, und daher eben dieselben, wie die Grenzen der ganzen Linie.

II. Die Grenzen an den Theilen der Fläche, Linien.

III. Die Grenzen an den Theilen des Körpers, Flächen.

§. 4. Die bisher geführten Betrachtungen geben Begriffe, von den Linien und Flächen als Grenzen anderer Ausdehnungen. Aber wenn man Theile der Linie annimmt, so erhält man Punkte in der Linie; diese sind wohl von einander nicht verschieden, und man kann sie daher ansehen, als wäre es der nämliche Punkt, der nach und nach an die verschiedenen Stellen durch Bewegung gekommen sey. Daher ist die Vorstellung richtig, daß durch Bewegung eines Punktes, eine Linie entstehe. Auf die nämliche Weise läßt sich die Entstehung des Körpers durch Bewegung der Fläche zur Seite begreifen. Man erhält hiedurch Begriffe von den Ausdehnungen, wie sie für sich bestehen können (absolute Begriffe ihres Entstehens) ohne daß man sie als Begrenzungen anderer Ausdehnungen immer denken müße.

§. 5. Anmerkung. Man macht sinnliche Bilder von Punkten und Linien auf verschiedene Weise. (Man könnte sie physische Punkte und Linien heißen, die dann zu geometrischen werden, wenn man an die überflüßi-

gen Ausdehnungen derselben nicht mehr denkt.) Man steckt für erstere Stäbe u. d. g. in die Erde, man nimmt zuweilen gar hohe Thürme, Bäume zu solchen Bildern an; auf dem Papiere macht man Tüpschen, oder Kreuzschnitte wie fig. 1. a und b sind. Bilder von Linien werden auf dem Felde durch Gräben oder Streifen u. d. g. gezogen; auf dem Papiere geschiehts mit der Spitze eines Reisbleis u. d. g. wo man im lezten Falle nach (4) verfährt. Diese Bilder von Punkten und Linien sind nun zwar nicht solche geometrische Dinge, und sie sollen und brauchen auch das nicht zu seyn, sie erinnern uns nur an den Ort oder Gegend, wo wir uns den geometrischen Punkt oder die geometrische Linie als vorhanden denken müssen. Sollen nun die Bilder diese lezte Absicht gut erfüllen, so müssen sie äußerst zart gezogen werden, denn bei einer merklich breiten Linie würde man sehr viele Orte angeben können, wo die geometrische Linie liegen könnte, und doch soll die Linie in den meisten Fällen nur eine einzige bestimmte Lage haben, eben das gilt vom Punkte.

§. 6. Die Linien sind entweder gerade, wie A B fig. 2. oder krumme, wie a b c fig. 3. Man sagt von der geraden Linie, daß alle Punkte in ihr nach einerlei Richtung liegen; in der krummen aber liegt immer zwischen zween Punkten, so nahe man sie auch aneinander nimmt, einer, der mit diesen zween Punkten nicht in der nämlichen Richtung liegt. Diese Merkmale aber erklären nicht beide Linien, weil man darin schon von geraden und krummen Richtungen spricht; und also schon die Kenntniß der beiden Linien voraussetzt. Man kann eigentlich beide Linien nicht erklären, nur folgendes als eine nähere Beschreibung anführen.

Wenn ein Punkt nach §. 4. eine Linie beschreibt, und von der einmal angenommenen Richtung nicht abweicht, so beschreibt er eine gerade Linie; krumm hingegen wird die Linie, wenn er

in

in jeder allerkleinsten Fortbewegung von der vorigen Richtung abweicht.

§. 7. Grundsätze. I. Eine gerade Linie kann nach Erfoderniß oder Willkür verlängt oder verkürzt werden.

II. Zwischen zween Punkten giebt es nur eine einzige gerade Linie.

III. Wenn zwo gerade Linien auch nur zween Punkte gemein haben, so fallen sie ganz zusammen.

IIII. Daher bestimmen zween Punkte die Lage einer geraden Linie; sind diese zween Punkte zugleich die Endpunkte derselben, so wird auch ihre Länge dadurch bestimmt.

V. Der Schnitt zwoer geraden Linien kann nur ein einziger Punkt seyn; eben das gilt von einer geraden und krummen, oder auch von zwo krummen Linien, die sich schneiden.

VI. Wenn ein einziger Punkt in zwoen Linien, sie seyen gerade oder krumm, zugleich seyn soll, so muß er in ihrem Schnitte seyn.

§. 8. Lehrsatz. Die gerade Linie A B fig. 4. ist kürzer, als die krumme A E B, oder die gebrochene A C B (Winkellinie) zwischen den nämlichen Punkten A und B.

Beweis. Wenn der Punkt, der die gerade A B beschrieb in B kömmt, so hat er sich bis B von A entfernt, und diese Entfernung muß ihre Bestimmung haben, wenn man sie auch nicht angeben könnte; geht ein Punkt von A bis B in der krummen A E B oder der A C B, so weicht er von A B ab, und kömmt wieder hinzu; auch in diesen Fällen sagt man, wenn die beiden leztern Punkte in B kommen, sie seyn bis B von A entfernt; aber ihre Wege enthalten die obigen Abweichungen,

 nebst

nebst derselben bestimmten Entfernung, und sind daher grösser.

Anmerkung. Der Punkt, so die Winkellinie beschreibt, kann, wenn er sich stetig bewegen soll; d. i. wenn seine Bewegung nicht unterbrochen werden soll, nicht plötzlich aus der Richtung A C in die C B kommen, ohne bei C eine Krümmung zu machen. — Denkt man ihn nur einen Augenblick ruhend, wenn er in C kam, so entstehet bei C eine scharfe Ecke, ein Winkel, wovon bald noch mehr gesagt werden soll.

§. 9 Zusatz. Weil die gerade Linie zwischen zween Punkten kürzer als jede andere ist, (die möglichst kürzeste zwischen zween Punkten) so wird durch sie der Abstand dieser zween Punkte gemessen; weil ein solcher Abstand nur ein einziger seyn kann.

Erklärungen.

§. 10. Eine Ebene ist eine Fläche, in die eine gerade Linie, wenn sie nach beliebiger Richtung gelegt wird, ganz hineinfällt. Ein Bild davon wäre ein ebener Spiegel.

§. 11. Ein Paar gerade Linien A B, A C, fig. 5, die in einer Ebene liegen, und vermöge ihrer Neigung zu einander in einem Punkte A zusammenstoßen, bilden an dem Punkte A des Zusammenstoßes einen ebenen **Winkel**. Die geraden Linien heißen des **Winkels Schenkel**. Man benennet den Winkel mit einem Buchstaben, wie A, oder mit dreien, wie A C D, B C D fig. 6., wo der Buchstabe, der in des Winkels Spitze ist, in der Mitte stehen muß; auch zuweilen mit einem in der Oefnung gesezten Buchstaben, wie o, u, fig. 6.

Anmerkung. Eigentlich ist der Winkel die Oefnung solcher zwo Linien, die sie nach dem Zusammenstoße

stoße noch behalten. Diese Oefnung wird größer oder kleiner, nachdem diese zwo Linien weniger oder mehr Neigung zu einander haben. Die größte Neigung wäre wohl dann, wann die zwo Linien ganz aufeinander fielen, und da ist der Winkel möglichst klein, oder es giebt eigentlich hier gar keinen Winkel.

Die kleinste Neigung ist, wenn die Linien zu einer einzigen geraden werden, wie, wenn sich die Linie AB von C wegdrehte; der Punkt A jedoch beständig in seiner Stelle blieb, bis A C mit A B eine einzige gerade Linie ausmachte. Daß hier wieder kein Winkel entstehe, ist klar; doch pflegt man auch diese Lage der zwo Linien, und die, wenn das Drehen der A B noch weiter geht, daß wieder ein Winkel, nur auf der andern Seite, entsteht, bei andern Gelegenheiten besonders zu betrachten.

§. 12. Grundsatz. Die Größe des Winkels hängt gar nicht von der Länge seiner Schenkel ab.

Erklärungen.

§. 13. Zween auf einer geraden Linie A B fig. 6. stehende Winkel u, o, die einen Schenkel D C gemein haben, heißen Nebenwinkel; sind solche gleich, wie m, n, fig. 7., so heißen sie rechte Winkel, und die Linie C D ist auf A B senkrecht. Ein Winkel u, der größer als ein rechter ist, heißt stumpf; ein kleinerer o, spitz; überhaupt heißen o, u schiefe Winkel, und D C, die sie macht, heißt schief auf A B.

§. 14. Eine mit Linien begrenzte Fläche heißt eine Figur. Sie erhält nach der Art und Zahl der begrenzenden Linien ihren Namen, und ist gerade- oder krummlienigt, drei- vier- oder vielseitig. Ist die Fläche eine Ebene, so heißt die Figur eine ebene; sonst ist sie erhaben, oder vertieft.

§. 15. Gleich nennt man Dinge, die einerlei Größe haben.

§. 16. Wenn Dinge in allen Eigenschaften übereinkommen, die man bei deren Erklärung angiebt, um sie dem Verstande als eigens bestimmte Dinge darzustellen, so heißen solche Dinge ähnlich. Die Aehnlichkeit kann daher ohne Gleichheit bestehen, weil größer oder kleiner seyn, die Dinge nicht zu einer andern Art macht. Das Zeichen, womit die Aehnlichkeit zweier Dinge gemerkt wird, ist $\backsim$. Die geometrische Aehnlichkeit wird in der Folge noch näher bestimmt werden.

§. 17. Wenn Dinge gleich und ähnlich sind, so heißen sie übereinstimmend, das Zeichen ist $\backsimeq$. Bei dieser vorhandenen Eigenschaft sagt man: Die Dinge decken einander wechselweise.

Grundsätze.

§. 18. Gerade Linien, die gleich sind, decken einander, d. i. sie fallen mit ihren Endpunkten zusammen, wenn man sich sie gehörig aufeinander gelegt, vorstellt. (§. 7., II.) und umgekehrt, wenn die Endpunkte von ein Paar geraden Linien zusammen fallen, so decken sie einander (§. 7. II.) und sind daher gleich.

§. 19. Winkel, die gleich sind, deren Schenkel fallen aufeinander, wenn sie gehörig aufeinander gelegt werden, und umgekehrt. — Denn in beiden Fällen ist die nämliche Neigung beider Linien, die eben den Winkel ausmacht.

Anmerkung. Von dem gehörigen Aufeinanderlegen der Linien und Winkel muß man merken, daß bei erstern der Endpunkt von der einen auf einen Endpunkt der andern kommen müße; und wenn demnach die

Linien

Linien aufeinander gelegt werden, so erfolgt bei ihnen das Decken. Bei Winkeln wird die Winkelspitze (Winkelpunct) des einen auf die Spitze des andern gelegt, dann ein Schenkel des einen auf einen Schenkel des andern, und so erfolgt nun bei gleichen Winkeln, daß die zweitern Schenkel derselben auch auf einander fallen. Es versteht sich, daß sich die Schenkel nicht eben decken müßen. (§. 12).

§. 20. Wenn ebene Figuren in ihren Grenzen einander decken, so fallen sie ganz aufeinander, und sind daher gleich und ähnlich, umgekehrt, gleich und ähnliche Figuren decken einander.

§. 21. Von Körpern gilt (§. 20.) auch, nur muß ihr Decken so verstanden werden, daß gleiche Körper ganz einerlei Raum einnehmen.

Anmerkung. Die folgenden Beweise von der Gleichheit gründen sich zuerst aufs Decken der Ausdehnungen, und wenn man die Gleichheit, ohne daß sich die Dinge, wie sie ganz sind, decken, dennoch darthut, so wird dieses blos von der Größe, nicht aber von der Gestalt verstanden.

§. 22. Erklärung. Die Geometrie ist die Wissenschaft, von allem, was sich an den drei verschiedenen Ausdehnungen deutlich begreifen läßt. Nur Größe und Gestalt ists aber, was man am geometrischen Raume begreifen kann.

§. 23. Von der Größe einer Sache erhält man deutliche Begriffe vermittelst der Erfahrung. Man kann dieses den absoluten Begriff von Größe nennen; erhält man den Begrif von der Größe vermittelst des Messen, so ist das nichts anders, als eine Vergleichung der Größe mit dem Maasstabe anstellen, nach eben der Art, wie das geometrische Verhältniß, (Rechenk. §. 94. und 98.)

und hier ist der Maasstab die Einheit, und seiner Natur nach eine bekannte Größe (Rechenk. §. 4.)

Wie groß der Maas stab zu einer Größe seyn müsse, ist nicht zu bestimmen; die Natur der Ausdehnung giebt zwar an, daß die ganze Ausdehnung (und dieses läßt sich von allen Dingen, die größer und kleiner seyn können (Quantitäten oder Größen) mit gehöriger Einschränkung sagen) aus unendlich vielen kleinern Ausdehnungen bestehe; allein die Vergleichung des unendlich kleinen Theilchen mit seinem Ganzen, ist dem Begriffe nach dunkel, und für die Sinne unbrauchbar.

§. 24. Zusatz. Das Messen kann aber entweder durch unmittelbares Vergleichen des Maasstabes mit der Größe, oder durch mittelbare Vergleichung anderer und anderer Größen (Rechenk. 362.) geschehen. Die Schlüsse, durch die man in der Folge die Gleichheit gewisser geometrischen Dinge darthut, sind von der lezten Art.

Anmerkung. Hiebei ist noch keineswegs gesagt, daß man eben mit dem angenommenen bekannten Maasstabe, eine jede vorgegebene Größe messen könne, der Maasstab und Größe können sich zu einander verhalten, wie eine Rational- und Irrationalzahl, (Rechenk. §. 273.) oder auch kann die Größe selbst mit dem Maasstabe unausmeßbar seyn, und verhält sich so, wie die gewöhnlichen und Dezimalbrüche (Rechenk. §. 167. und 168.) Das alles heißt so viel: Will oder kann man den Maasstab nicht in jede beliebige Zahl Theile theilen, so giebt es Größen, die mit dem angenommenen Maasstabe unausmeßbar sind. Aber da es verstattet ist, immer kleinere und kleinere Theile des Maasstabes zu nehmen, und solche zum Messen der vorgegebenen Größe zu brauchen, so ist es gewiß, daß man endlich von dem unausmeßbaren Theile der Größe solche Theile nur ungemessen lasse, die gewiß kleiner sind, als das angenommene Maastheilchen; und das lezte kann man so klein annehmen, als man will, und folglich wird

der

der noch kleinere ungemessene Theil der Größe kleiner als jede anzugebende Größe. In diesem Sinne nun sagt man, man habe die Größe bis auf einen Theil, der kleiner, als jede angebliche; Größe ist, gemessen; und dieses heißt doch wohl, man habe die Größe genau gemessen, d. i. man wisse das Verhältniß des Maasstabes zur Größe genau.

§. 25. Erklärung. Die Geometrie theilt sich von selbst nach (§. 2.) in drei Theile; in die Longimetrie (Längenmessung) Planimetrie, (Flächenmessung) und Stereometrie (Körpermessung), jedoch kann die Natur gewisser Linien erst im zweiten Theile, und so gewisser Flächen erst im dritten Theile ganz zum Begriffe gegeben werden.

§. 26. Um gerade Linien zu messen, nimmt man eine gerade Linie von einer bekannten Länge zum Maasstabe; gewöhnlich wird dazu ein Fuß, eine Ruthe gebraucht, bei größern Längen wird die Meile gebraucht. Doch dieses nur von den Linien auf der Erde; bei Messungen der Himmelskörper wird wohl auch der Erddurchmesser als Maasstab genommen. — Dieser Maasstab wird sovielmal in die Linie gelegt, als es sich thun läßt; wo es begreiflich wird, daß auch zulezt noch Theile des ganzen Maasstabes in der Linie seyn können, die aber nach (24.) könnten angegeben werden. Der Fuß ist fast in jedem Lande von anderer Länge, und so verhält es sich mit der Ruthe und Meile. Die Ruthe ist in einigen Orten 12, in andern 15, noch in andern 16 Fuß, wobei der unverzeihliche Fehler noch oft gemerkt wird, daß in dem nämlichen Lande mehrere Verschiedenheiten vorkommen. — Die Meile ist eben so verschieden, doch ist sie es nur in größern Staaten von Europa.

Die

Die folgende Tabelle stellt einige Exempel dar, sie ist aus Krusens Comtoristen genommen.

Man theile den französischen Fuß (pied de Roi) in 1440. Theile, so enthält solcher Theile der Fuß zu Mainz 1335. zu Frankf. am Main 1270.

zu Mannheim	1286.	zu Heidelberg	1235.
Wien	1410.	Der rheinländ.	1391,3.
Erfurt	1251.	zu Leipzig	1251.

Viel mehrere Vergleichungen findet man beim Krusen; und Krunizens Encyclopädie 1, .en Theil in Münchhausens Hausvater 1ten Theil, und Maiers praktischer Geometrie 2ten Theil vom Fuße der meisten Länder, Provinzen und Städte Europens. Gewöhnlich wird der Fuß in 12 Theile (Zolle) und diese abermal in 12 Theile (Linien) getheilt.

Bei geometrischen Anwendungen pflegt man zehntheilige Unterabtheilungen anzunehmen; und so verhalten sich folgende Theile, wie folgende Stellen in den Zahlen. Die Einheiten, die noch von keiner Abtheilung herkommen, (die Ganzen) pflegt man mit einer Nulle oben über, die Theile von der ersten Abtheilung mit einem Striche u. s. w. zu bezeichnen. z. B. $5^0 8' 3'' 6'''$ Oder auch $583 6'''$ oder 5,836; b deutet hier, 5 Ruthen, so sind 8, Zehntheile, 3, Hunderttheile; 6 ,, Tausendtheile der Ruthe u. s. w.

Wie man krumme Linien messen müsse, kann hier noch nicht gezeigt werden, so wie überhaupt eine vollständige Anleitung zum Linien- und Flächenmessen dann erst statt findet, wenn noch mehrere andere Sätze bekannt sind, die die Möglichkeit, Linien und Flächen mittelbar zu messen (§. 24.) nebst der Richtigkeit des Verfahrens darthun.

Vom

Vom Zirkel.

§. 27. Erklärung. Eine gerade Linie CA fig. 8. drehe sich auf einer Ebene um ihren feststehenden Endpunkt C, daß sie nach und nach in die Lagen CB, CD u. s. w. bis wieder in CA komme, so beschreibt ihr anderer Endpunkt A die krumme in sich selbst laufende Linie ABEFDA; diese krumme Linie heißt: Kreislinie. (Kreis, Peripherie) Ein Theil von ihr, wie AB, EF, Bogen; C heißt der Mittelpunkt (Centrum) CA, CB, CD gerade Linien aus dem Mittelpunkte an den Kreis, Halbmesser; BCD eine gerade Linie von einem Punkte B des Kreises durch den Mittelpunkt, bis sie wieder in D den Kreis trift: Durchmesser; EF eine gerade Linie, die den Kreis auch in zween Punkten trift, aber nicht durch den Mittelpunkt geht, heißt eine Senne.

Die vom Kreise begränzte Fläche heißt: Zirkelfläche (die Scheibe, Zirkel). Ein Theil der Fläche ABC von zween Halbmesser und einem Bogen begrenzt: Ausschnitt. Der Theil EFE von einer Senne und Bogen begrenzt: Abschnitt.

§. 28. Zusatz. Ein jeder Punkt, wie a in CA beschreibt eben so einen Kreis, weil es nicht eben gefodert wird, daß die den Kreis beschreibende Linie eine gewisse bestimmte Länge haben müsse. Kreise aus einerlei Mittelpunkt mit verschiedenen Halbmessern heißen konzentrische Kreise.

§. 29. Zusatz. Alle Halbmesser eines und des nämlichen Kreises, oder gleicher Kreise sind gleich; denn sie sind nichts anders, als die eine gerade Linie in andere Lagen gelegt. Dieses gilt auch von den Durchmessern, welche doppelte Halbmesser sind.

§. 30.

§. 30. Zusatz. I. Gerade Linien, die mit einem Endpunkte am Mittelpunkte liegen, und kleiner als der Halbmesser sind, treffen den Kreis noch nicht; also liegen solcher Linien zweite Endpunkte auch noch innerhalb des Kreises; und umgekehrt, von Punkten innerhalb des Kreises bis in den Mittelpunkt gerader Linien gezogen, sind kleiner als der Halbmesser.

II. Sind die Linien aus dem Mittelpunkte größer als die Halbmesser, so schneiden sie den Kreis, und die zweiten Endpunkte derselben liegen außerhalb des Kreises; und umgekehrt: aus einem Punkte außerhalb des Kreises in des Kreises Mitelpunkt eine Linie gezogen, ist länger als der Halbmesser.

III. An jeden Bogen des Kreises läßt sich eine Senne legen; denn in des Bogens Endpunkte läßt sich eine gerade Linie legen. (§. 7, II.)

IIII. Die Senne liegt innerhalb des Kreises, also liegen alle Punkte, die man zwischen ihren Endpunkten annehmen kann, näher am Mittelpunkte, als des Bogens Punkte, wegen (I.)

§. 31. Zusatz. Conzentrische Kreise können einander weder schneiden noch berühren, weil der Theil des Halbmessers weder größer als der Halbmesser, noch ihm gleich seyn kann.

§. 32. Zusatz. Einen Punkt p innerhalb des Kreises, und einen q außerhalb desselben angenommen, und in beide eine gerade Linie pq gelegt, schneidet den Kreis in r; denn der Kreis ist zusammenhängend; die Richtung der geraden Linie muß ihn aber wegen der Annahme ihrer Endpunkte treffen. Dieses kann nur in einem Punkte geschehen. (§. 7, V.) Von einem zusammenhängenden

den

den Bogen op fig. 9. muß dieses auch gelten, dessen einer Punkt o innerhalb, der ander p außerhalb des Kreises liegt.

§. 33. Zusatz. Eine gerade Linie mn, fig. 9., die nur mit einem Theile mn, der so groß seyn kann als man will, innerhalb des Kreises liegt, schneidet, gehörig verlängt, den Kreis wenigstens zweimal, denn der Theil kann auf jeder Seite länger als der Halbmesser gemacht werden (§. 7. I.) und erhält daher gewiß diese verlängte Linie auf beiden Seiten ihre Endpunkte außerhalb des Kreises (§. 30.) sie hat aber auch wenigstens einen Punkt in dem Kreise, und schneidet daher auf jeder Seite den Kreis (§. 32.) An einem andern Orte wird gezeigt werden, daß eine solche gerade Linie nur zweimal den Kreis schneide.

§. 34. Lehrsatz. Der Durchmesser AB fig. 9. theilt die Kreisfläche, und den Kreis in zwei gleiche und ähnliche Theile.

Beweis. In beiden Zirkelstücken ADBCA und AEBCA denke man sich so viele Halbmesser gezogen, als man in den Bögen Punkte annehmen könne, und lege das Stück ADBCA auf das untere, so, daß AB, welche in beiden Stücken die nämliche ist, gehörig auf AB gelegt werde, (§. 18. Anmerk.) so fällt A auf A, B auf B, C auf C; aber in C liegen die Halbmesser alle mit ihren ersten Endpunkten, die zweiten liegen in ihren Bögen, und eben diese zweiten müßen aufeinander fallen (§. 29.) und so ist erwiesen, daß die Endpunkte der Bögen A und B, und alle zwischen diesen liegende Punkte aufeinander fallen, und decken sich daher beide Zirkelstücke ganz. (§. 20,)

§. 35.

§. 35. Zusatz. Bögen eines und des nämlichen Kreises fallen, wenn sie gehörig aufeinander gelegt werden, ganz aufeinander. Bögen verschiedener Kreise können nicht so ganz aufeinander fallen, denn ihre Halbmesser sind ungleich.

§. 36. Zusatz. Auf einer unbegrenzten geraden Linie läßt sich aus einem in ihr angenommenen Punkte ein halber Kreis, und nicht mehr beschreiben, denn die gerade Linie wird hier der Durchmesser.

§. 37. Zusatz. Aus einem Punkte C fig. 10. der außerhalb einer geraden Linie liegt, läßt sich ein Kreis beschreiben, der die gerade Linie wenigstens in zween Punkte schneidet. Man nehme einen willkürlichen Punkt E in der BA an, und ziehe CE, man verlänge nun CE um ein willkürliches Stück ED, und beschreibe mit CD den Kreis, so liegt ein Theil der AB innerhalb dieses Kreises, und daher schneidet AB nach (§. 33.) den Kreis zweimal.

§. 38. Lehrsatz. Zween Kreise schneiden sich wenigstens zweimal, wenn ihre Mittelpunkte von einander so entfernt liegen, daß diese Entfernung weniger, als die Summe ihrer Halbmesser beträgt; zugleich aber auch eines jeden Durchmesser größer, als des andern Halbmesser sey.

Beweis. Die beiden Kreise seyen haDh; blkb; fig. 10. und ihre Mittelpunkte C, c, gewiß in einer geraden Cc (7, II.) welcher dieser Mittelpunkte Entfernung ist (9.); Nach der Bedingung ist $Cc < Ca + cb$ und $Ca < cg$; auch $cb < ha$. Die Punkte h, C, b, c, g liegen in einer einzigen geraden Linie, denn es ist die verlängte Cc.

Aus

Aus $Cc < Ca + cb$ folgt $Cc - Ca < cb$; was nun auch immer $Cc - Ca$ sey, d. i. positiv, oder negativ, so ist es immer kleiner als cb. Wäre es positiv, so ist es das Stück ca; ist es $= 0$, so liegt a in c; aber wenn es negativ wäre, so liegt a zwischen c und g (Rechenk. 141.) also liegt a, d. i. ein Punkt des ersten Kreises in einer Entfernung von des andern Kreises Mittelpunkte c, die kleiner ist, als des andern Kreises Halbmesser d. i. a liegt in der Fläche des Kreises blkb (30.). Daß a nicht über g hinausfalle, ist klar, weil $Ca < bg$ ist. Aber der Punkt h des ersten Kreises muß außerhalb des zweiten liegen, denn er liegt von c weiter als cb; wegen $cb < ah$; da aber der Kreis haDh zusammenhängend ist, so muß in seinem Gange von a durch F bis h einmal in den Kreis blkb eingeschnitten werden; es geschehe in n. Aber von h nach D bis wieder a muß noch ein Einschnitt, nämlich in m geschehen. (32.)

Anmerkung. Man hat für die folgenden Sätze nicht nöthig zu wissen, daß sich zween Kreise auf einer Ebene, wie die vorigen, nicht in mehr als in zween Punkten schneiden können, wenn die angegebenen Bedingungen statt haben. In der Folge noch soll gezeigt werden, daß das Schneiden solcher Kreise in nicht mehr als zween Punkten geschehen könne.

§. 39. Zusatz I. Wenn $Cc = Ca + bc$ so fällt a und b zusammen, also hat in Rücksicht dieser zwei Punkte das Schneiden der Kreise nun nicht mehr statt, weil sich die obigen Schlüsse nicht anbringen lassen. Sollten sich die Kreise noch in andern Punkten außer a und b (welche jedoch hier nur ein Punkt sind) schneiden, so ziehe man Halbmesser, wie cm, Cm, cn, Cn in diese andere

Punkte, folglich würde bei der Annahme, daß noch ein Schnitt erfolge, $Cm + cm > Ca + ca$ seyn (§. 9.) welches der obigen Annahme widerspricht.

II. Man nehme in einem der beiden Kreise z. B. in FaDh einen Punkt m an, und ziehe Cm und cm; nun ist $Cm + cm > Ca + ca$ (§. 8.) aber $Ca = Cm$, also $cm > ca$; so nahe auch m an a genommen wird; daher liegt m außerhalb des Kreises lbkg (§. 30, II.) folglich gehen die Kreise nach der Berührung in a auseinander, und schneiden sich nicht mehr.

§. 40. Lehrsatz. Die Bögen AB, ab fig. 8. conzentrischer Kreise, die zwischen zwei Halbmessern liegen, die den nämlichen Winkel ACB am Mittelpunkte bilden, sind von ihren Kreisen die gleichvielsten Theile.

Beweis. Man lege den Ausschnitt ACB herum, daß CB auf CB bleibe, so wird A irgendwo in den Kreis fallen; (§. 29.) es geschehe in E, so deckt der Bogen AB den BE (§. 35.) Dieses wird aus den nämlichen Gründen, bei wiederholten solchen Auflegungen immer so folgen. Aber bei der obigen Lage kann der Punkt a nicht anders, als in e kommen; und so deckt auch ab den Bogen be; dieses letzte muß auch bei Wiederholungen immer so folgen. Wenn aber AB in seinem Kreise n mal herumgelegt werden kann, so folgt dieses eben so für ab, daher sind AB und ab in ihren Kreisen gleichvielmal enthalten; oder sie sind von ihren Kreisen die gleichvielsten Theile.

Vom

Vom Maaße der Winkel.

Grundsätze.

§. 41. Wenn der Winkel A fig. 5. nach (§. 11. Anmerk.) größer oder kleiner wird; so beschreibt jeder Punkt der AB wie E einen Bogen, und es ist begreiflich, daß in eben dem Verhältnisse der Bogen wachse, wie der Winkel wächst.

§. 42. Das Maas zu einem Winkel müßte freilich ein bekannter Winkel seyn, durch den man angebe, wie sich die Größe des zu messenden Winkels zu diesem Maaswinkel verhielt. Man hat zum Maasstabe den rechten Winkel gebraucht. Nun ist aber aus (§. 41.) klar, daß sich der Zirkelbogen, der in des Winkels Spitze seinen Mittelpunkt hat, genau, wie die Größe des Winkels verhalte. Wüßte man nun, was für ein Theil der genannte Bogen von seinem Kreise sey, so ließ sich die Größe des Winkels hierdurch angeben, und so wäre dann der Winkel gemessen. Daß es übrigens gleichviel sey, ob man einen großen oder kleinen Halbmesser zur Beschreibung des Bogens brauche, erhellet aus (§. 40.)

Anmerkung. Man hat Werkzeuge, Winkel zu messen, erfunden; ihre Einrichtung gründet sich auf das eben Gesagte. Man hat die Kreise ganzer, halber und Viertels-Zirkelscheiben in gleiche Theile getheilt, und Kunstgriffe angegeben, die Mittelpunkte dieser getheilten Scheiben auf die Spitzen der zu messenden Winkel zu bringen; man heißt solche Werkzeuge Winkelmesser; die, so man im Großen braucht, Astrolabien, die kleineren, deren man sich auf dem Papiere bei Zeichnungen bedient, Transporteurs.

Man pflegt den Kreis zuerst in 360. Theile zu theilen, die man Grade nennt; einen jeden Grad theilt

theilt man wieder in 60. Theile, und diese leztere heißen: erste Abtheilungen (minuta prima); diese erstern Abtheilungen werden wieder in 60. Theile getheilt: zweitere Abtheilungen (minuta secunda. Ihre Bezeichnung ist 5°36′12″ . . . d. h. 5 Grade, oder Theile die von keiner vorhergegangenen Abtheilung herkommen (daher auch die o zum Zeichen gebraucht wird) 36. Minuten 12. Sekunden.

Diese Winkelmesser werden mit ihren Mittelpunkten an die Spitze des zu messenden Winkels so angelegt, daß ein Schenkel des Winkels mit einem bestimmten Halbmesser der Scheibe zusammenfalle, wodurch dann der andere Schenkel des Winkels einen bestimmten Bogen in der Scheibe abschneidet, die Grade dieses Bogens geben das Maas des Winkels.

Anmerkung. Beim Vortrage müssen die Instrumente und ihr Gebrauch gezeigt werden; denn jede gegebene Beschreibung muß nothwendig, ohne diese Vorzeigung, undeutlich bleiben. Daß man übrigens schon außerordentlich große Scheiben haben müßte, wenn auch nur einzelne Minuten darauf angebracht werden sollten, wird durch dieses Vorzeigen begreiflich; aber solche Scheiben würden eben wegen ihrer Größe und mannigfaltigen Abtheilungen theils zu kostspielig, theils zu unbequem ausfallen. Man hat aber an solchen Instrumenten gemeiniglich Kleinmesser, Mikrometer, (Verniers oder Nonin's) wodurch man in den Stand gesetzt wird, noch kleinere 10te, 30te, manchmal 45te und oft noch viel kleinere Theile, der auf der Scheibe schon angebrachten kleinsten Abtheilungen auf dem Instrumente anzugeben, oder zu greifen.

§. 43. Zusatz I. Nebenwinkel (§. 13.) haben zu ihrem Maaße einen halben Kreis wegen (§. 36.) daher 180°.

II. Sind beide gleich, wie (13.) so hat ein jeder 90°, oder es ist ein rechter Winkel = 90°.

III. Ist einer kleiner, als ein rechter (spitz) so ist der andere größer oder stumpf.

§. 44. Zus. Zween Nebenwinkel o, u fig. 6, die den Schenkel CD gemein haben, und derer Maas = 180° ist, stehen auf einer geraden Linie; denn gesetzt AB wäre keine gerade Linie, so kann man AC gerade verlängern, dieses geschehe bis in E, so ist nun der ∢ DCA + ∢ DCB = 180°, (§. 43.) aber ∢ DCA + ∢ DCE wäre auch = 180°, also ∢ DCA + DCE = ∢ DCA + DCB, folglich ∢ DCE = ∢ DCB; also fällt die verlängte AC mit CB zusammen; sonst wäre der Schluß widersprechend (§. 19.)

§. 45. Zus. Wenn mehrere Nebenwinkel vorhanden sind, so läßt sich immer einer von ihnen durch Rechnung finden, wenn die übrigen alle gemessen sind. Z. B. Es seyen m, n, o, x, Nebenwinkel; und m, n, o gemessen, so ist 180° = m + n + o + x, und x = 180° − m − n − o (Rechenk. §. 337. V)

§. 46. Erkl. Zwo gerade Linien, AB, CD fig. 11. die sich in einem Punkte E schneiden, bilden vier Winkel, wovon die zwei, die mit ihren Spitzen gegen einander gekehret sind, wie AEC, DEB, und AED, CEB Scheidelwinkel heißen.

§. 47. Lehrs. Scheidelwinkel sind gleich.

Bew. ∢ AEC + ∢ AED = 180° (§. 43.) = ∢ AED + ∢ DEB; daher ∢ AEC = ∢ DEB (Rechenk. §. 337; b) eben so wird erwiesen, daß ∢ AED = ∢ CEB.

§. 48. Zus. Von vier Scheidelwinkeln braucht man nur einen zu messen; die übrigen finden sich durch Rechnung. Z. B. AEC sey gemessen, und = 48° 24′, so ist AED = 180° − 48° − 24′ = 131° + 36′ (§. 45) und ∢ AEC = ∢ DEB ferner ∢ AED = ∢ CEB (§. 47.)

§. 49. Zus. Winkel um einen Punkt C fig. 12. haben zu ihrem Maaße einen ganzen Kreis, oder 360°; sind hiebei einige Scheidelwinkel, so finden bei ihrer Messung die Vortheile (§. 48.) statt; wo nicht, so müssen sie alle, weniger einem, gemessen werden; um ihr Maas einzeln zu wissen.

§. 50. Zus. Wenn CD fig. 7., welche auf AB senkrecht ist, verlängt wird, etwa bis in E, so entstehen vier rechte Winkel, und so ist auch CB auf DE senkrecht.

§. 51. Aufg. Einen Winkel a so groß zu machen, als ein gegebener anderer A fig. 13. ist.

Aufl. Man beschreibe mit einem willkürlichen Halbmesser = AB den Bogen BC; man beschreibe mit eben dem Halbmesser aus a, dem Endpunkte einer schon liegenden Linie af, den Bogen bm; man lege den Bogen BC auf bm, damit BC einen gleichen Bogen bc in b mabschneide, (etwa so, daß man nur die Entfernung der Punkte B; C nimmt; d. i. die gerade Linie, die zwischen B und C statt hat, und solche an b legt, bis sie in dem Bogen bm den Punkt c einschneide; dieses ist nach (§. 30, III. und IIII.) möglich. Man ziehe von a nach c die Linie ac, so ist bac der verlangte gleiche Winkel.

Beweis. Legt man den Ausschnitt BAC, so auf bac, daß BA auf ba komme, so decken die zwo Linien, und die Bögen auch, wegen (§. 35.) und wegen der gemachten Gleichheit; und daher fällt C in c; also auch BC auf bc, und die Winkel sind gleich (§. 19.)

Anmerk. Man kann die Auflösung auch mechanisch mit den in (§. 42. Anmerk.) genannten Instrumenten machen, und da ist die Auflösung richtig, wenn man mit richtig getheilten Instrumenten richtig verfährt. Beim Vortrage kann dergleichen gezeigt werden.

Von

Von Dreiecken.

§. 52. Erkl. In den Schenkeln des Winkels A. fig. 14, I. lassen sich die Punkte B, C anneh-men, und daher die gerade BC ziehen, auf diese Art wird nun eine Ebene eingeschlossen, und die Figur heißt ein Dreieck. Sind die drei Seiten AB, AC, BC gleich, so heißt das Dreieck gleichseitig; sind zwo Seiten, etwa AB, AC gleich, so heißt es gleichschenklicht; sonst ungleichseitig. Da ferner A ein rechter oder stumpfer Winkel seyn kann, so giebt es Dreiecke, worin wenigstens ein rechter, oder ein stumpfer Winkel ist.

§. 53. Zus. So erhellet, daß drei gerade Linien einen Raum einschließen, und also eine Figur (§. 14.) bilden. Daß aber eine geradlienichte Figur zum wenigsten drei Seiten haben müße, erhellet so. Zwo gerade Linien können sich nur in einem Punkte berühren, wenn sie getrennt bleiben, und nicht eine einzige machen sollen. (§. 7, III.) In diesem Falle nun bilden sie entweder eine einzige gerade Linie, oder einen Winkel, in keinem dieser Fälle aber wird ein Raum eingeschlossen, aber drei Linien schließen ihn ein. (§. 52.)

§. 54. Zus. Jede zwo Linien eines Dreiecks sind größer; als die dritte; denn jede zwo Linien machen eine Winkellinie, (§. 52.) zwischen deren Endpunkten die dritte, die gerade und folglich kürzere Linie ist. (§. 8.) Zwo Seiten müssens aber auch seyn, weil sie Winkel bilden müssen, der mit einer Linie geschlossen wird, damit so die Möglichkeit des Dreieckes nach (§. 52.) erhelle.

§. 55. Aufg. Ein gleichseitiges Dreieck aus einer gegebenen Linie AB fig. 15. zu beschreiben.

Aufl. Man beschreibe 1) mit AB den Kreis DECB, so, daß A der Mittelpunkt ist. 2) den Kreis DCFA mit eben der AB, daß B der Mittelpunkt ist, und ziehe von D, wo sich beide Kreise schneiden, die geraden Linien DA, DB, oder aus dem Schnitte C, die Linien CA, CB, so ist das Δ ADB oder Δ ABC das verlangte.

Bew. Die Linie AB zwischen beiden Mittelpunkten ist kleiner als AB+AB; also schneiden sich beide Kreise zweimal (§. 38;) nun ist AB=AD=DB (§. 29.) eben so ist AB=AC=CB; man kann von diesen Dreiecken nehmen, welches man will; denn ein jedes von ihnen ist gleichseitig.

§. 56. Aufg. Aus zwo Linien AB; CD fig. 16, wovon jedoch jede größer als der andern Hälfte seyn muß, ein gleichschenklichtes Dreieck zu beschreiben.

Aufl. Man beschreibe aus den Endpunkten der Linie AB mit der andern CD die gleichen Kreise EF; und ziehe aus dem Schnitte C die geraden CA; CB, und so ist das Dreieck CAB das verlangte. Oder, wenns bestimmt ist, welche Linie nur einmal in das Dreieck kommen soll, so wird diese bestimmte statt AB genommen.

Bew. Die Bedingniß, daß jede Linie größer als der andern Hälfte seyn müße, ist klar aus (§. 54.) Nun ist AB < AC+CB; daher die Möglichkeit des Schnittes in C, und noch eines in D, (§. 38.) und so auch die Möglichkeit zweier Dreiecke nach dem obigen Beweise. (§. 55.) Im ersten ist AC=CB; im andern AD=DB. (29.)

Anmerk. Die Linie im gleichschencklichten Dreiecke, die nur einmal vorkömmt, heißt hier eigens Grundlinie.

Anmerk. Daß zwei Dreiecke in diesen Auflösungen herauskommen, wovon jedoch jedes die gefoderten Ei-

genschaf-

genschaften habe, macht die Auflösung nicht eben zweideutig, denn, wenn gefodert wird, auf welcher Seite der A B das verlangte Dreieck liegen soll, so ist hiedurch die Aufgabe einförmig bestimmt.

§. 57. Aufg. I. Aus drei gegebenen ungleichen Linien, die jedoch die in (54.) erfoderlichen Längen haben.

II. Aus zwo gegebenen Linien, nebst einem gegebenen Winkel ein Dreieck zu beschreiben.

Aufl. I. Man verfahre völlig nach §. 55. oder 56; d. i. man nehme eine Linie für die Grundlinie; beschreibe mit der zweiten einen Kreis E, und mit der dritten Linie den Kreis F wie in fig, 16,, und ziehe A C; C B. Doch ist es auch nicht nöthig, die ganzen Kreise zu beschreiben; denn man hat mit kleinen Bögen genug, wenn man nur einen Schnitt entweder nur C, oder nur D haben will.

II. Man verzeichne den gegebenen Winkel A fig. 17. (§. 51.) und trage in seine beide Schenkel die Länge der gegebenen Linien A B, A C, und ziehe C B.

Bew. Für I. ist der Beweis in (55.) und (56.) enthalten.

Für II. ist die Möglichkeit in (51); und (7, IIII.) enthalten; und die befolgte obige Vorschrift giebt von selbst die Richtigkeit des Verfahrens.

§. 58. Lehrs. Wenn in zwei Dreiecken ABC, abc fig. 17. gleich sind ein Winkel, nämlich A=a nebst den zwo Seiten, die diesen Winkel einschließen, d. i. AB=ab, AC=ac, so decken sich die beiden Dreiecke wechselweise.

Bew. Man lege A so auf a, daß AB auf ab, und folglich B auf b komme (§. 18.) so muß AC auf ac (§. 19.) und C in c fallen; aber zwi-

schen C und c kann nur B C = b c statt haben (§. 7. II.); daher decken die Dreiecke ganz, und der ∢ C = ∢ c; ∢ B = ∢ b.

§. 59. Zus. Es sey AB = AC; und so ab = ac; sonst noch alles, wie oben; nur hier AB = AC = ac = bc, d. i. beide Dreiecke mit zwo gleichen Seiten gleichschenklicht; so wird erstlich die obige Lage statt haben; aber auch zweitens kann man AC auf ab legen, so wird AB auf ac kommen, und das Decken im zweiten Falle wieder statt haben. Es ist aber aus der ersten Lage ∢ B = ∢ b; ∢ C = ∢ c und nun aus der zweiten Lage ist ∢ B = ∢ c = ∢ C; oder im gleichschenklichten Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

§. 60. Zus. Wären in den obigen Dreiecken alle Seiten gleich, und doch noch, wie im (§. 59.) der Winkel A = ∢ a so ist aus (§. 59.) ∢ B = ∢ C = ∢ b = ∢ c. Weil das gleichseitige Dreieck gewiß so betrachtet, gleichschenklicht ist. Aber es ist, wenn man eine Linie in ihm, welche man will, zur Grundlinie annimmt, jedesmal gleichschenklicht, und hat daher immer an der angenommenen Grundlinie gleiche Winkel. Folglich ist das gleichseitige Dreieck auch gleichwinklicht; oder es ist in ihm ∢ A = ∢ C = ∢ B.

§. 61. Lehrs. Wenn in zweien Dreiecken 17. fig. ∢ A = ∢ a; ∢ C = ∢ c, und AC = ac, d. i. Wenn zwei Winkel, und die Seite, an der sie liegen, gleich ist, so decken die Dreiecke einander wechselweise.

Bew. Man lege den ∢ A gehörig auf ∢ a, so wird A C auf a c fallen, und wegen ihrer Gleichheit der Punkt C in c; ferner wird A B auf a b fallen (§. 19.) und so wird der Punkt B in der hin-

länglich

länglich verlängten abliegen. Weil nun auch schon der ∢ C gehörig auf ∢ c liegt, so fällt CB auf cb; also auch der nämliche Punkt B in cb; d. i. B liegt in ab und cb; also gewiß in b (§. 7. II.) und daher decken sich die Dreiecke wechselweise ganz, und es sind alle auf einerlei Art liegende Stücke (ähnlich liegende Stücke) in ihnen gleich; oder es ist auch hier über die angenommenen gleichen Stücke, noch AB = ab; CB = cb; ∢ B = ∢ b.

§. 62. Zus. Wenn auch ∢ A = ∢ C; also auch ∢ a = ∢ c, und doch die obigen Bedingnisse AC = ac, ∢ A = ∢ a, ∢ C = ∢ c statt haben, und daher nun ∢ A = ∢ C = ∢ a = ∢ c, so kann man noch eine zweite Lage der obigen Dreiecke so machen, daß ∢ C gehörig auf ∢ a gelegt werde, und es erfolgt aus den Gründen (§. 61.) wieder das Decken; also wird nun in dieser zweiten Lage CB = ab; aber in der ersten war ab = AB; also ist nun auch CB = AB, folglich ist ein Dreieck gleichschenklicht, wenn es zween gleiche Winkel hat. Die Linie, an der solche zween gleiche Winkel liegen, heißt die Grundlinie.

§. 63. Zus. Wenn also zwo Seiten eines Dreieckes gleich sind, so sind es die Winkel an der Grundlinie (§. 59.); und wenn das lezte ist, so ist auch das erste wahr (§. 62.)

§. 64. Zus. Wenn in einem Dreiecke alle drei Winkel einzeln gleich sind, so wird ein solches nach (§. 62.), bei jeder angenommenen Grundlinie in ihm, gleichschenklicht seyn; und folglich ist es bei einzeln gleichen Winkeln, gleichseitig.

§. 65. Wenn daher alle drei Seiten eines Dreiecks gleich sind, so sind es die Winkel (§. 60.) und wenn das lezte ist, so ist das erste (§. 64.)

§. 66.

§. 66. Lehrs. Wenn in zwei Dreiecken ABC, abc fig. 17. alle drei Seiten gleich sind, so decken sie einander, und die Winkel, die in beiden Dreiecken gleichen Seiten gegenüber liegen, sind gleich.

Bew. Man lege AC auf ac, aber so, daß B und b auf verschiedenen Seiten der ac liegen; so hat B nun dreierlei Lagen I, kann B in die verlängte ac fallen, wie das fig. 18. vorstellt; oder II, (B fällt so, daß eine Linie Bb gezogen (§. 7, II.) die Linie ac schneide, und c rechter Hand von Bb liege, wie in fig. 19; oder III, daß eine Linie Bb die ac nicht treffe, und c linker Hand von Bb liege fig. 20.

In der ersten Lage wird aus den beiden Dreiecken das eine abB; und in diesem ist ab=AB; daher ∢ b=∢ B (§. 59.) und so sind nun in den Dreiecken ABC, abc nebst AB=ab; BC=bc, der eingeschlossene Winkel B=b, also werden die Dreiecke abc; ABC bei dieser bedingten ersten Lage einander decken (§. 58.)

In der II Lage giebt sich, wenn Bb gezogen ist, zuerst ein Dreieck abB, worin nach eben der Art, wie oben zu schließen, ∢ abB=∢ aBb; über dieses entsteht noch ein zweites Dreieck bBc; und weil hier auch BC=bc, so ist, wie oben ∢ Bbc =∢ bBC, folglich ∢ abB+∢ Bbc=aBb+bBC (Rechenk. §. 337; a) oder ∢ abc=∢ ABC; und folglich nach eben den Gründen, wie oben bei der ersten Lage, geschlossen, sind auch hier die Dreiecke übereinstimmend.

In der III Lage ist Δ abB gleichschenklicht, also ∢ ABb=∢ AbB, aber es giebt wegen der Lage der Punkte c C; noch ein gleichschenklichtes ΔBbc; also auch ∢ cBb=∢ cbB, daher nun ∢ ABb − ∢ cBb = ∢ AbB − ∢ cbB

(Rechenk.

(Rechenk. 337, b) oder $\sphericalangle$ abc = $\sphericalangle$ ABC und also wieder Δ abc $\cong$ Δ ABC.

§. 67. Zus. I. Es ist offenbar, daß man, anstatt ac, AC aufeinander zu legen, auch dieses eben so mit ab, AB, oder mit bc, BC hätte verrichten können; und so würde der Beweis gegeben haben, daß immer die Winkel beider Dreiecke, die der aufeinander gelegten Seite gegenüber liegen, gleich sind.

II, Hieraus läßt sich abermal die Aufgabe, einen Winkel, so groß als einen andern gegebenen zu machen, auflösen. Man schließe den gegebenen $\sphericalangle$ mit einer Linie, die eine beliebige Länge in den Schenkeln abschneidet, daß ein Dreieck entsteht (52.) und mache ein anderes Dreieck aus den nun gegebenen drei Seiten (§. 57.), so wird es den nämlichen zu verzeichnenden Winkel haben; dessen Lage leicht aus der Lage der gleichen Seiten bekannt wird.

§. 68. Zus. I. Uiberhaupt sind in den obigen Lehrsätzen allemal wahr: Winkel, die in übereinstimmenden Dreiecken gleichen Seiten gegenüber liegen, sind gleich, und Seiten, die gleichen Winkeln gegenüber liegen, sind gleich; d. i. mit einem Worte: ähnlich liegende Stücke solcher Dreiecke sind gleich.

II. Wenn die Stücke, aus denen in den obigen Sätzen die Uibereinstimmung der Dreiecke bewiesen wird, zur Beschreibung mehrerer Dreiecke gebraucht werden, so ist klar, daß solche alle $\cong$ werden, daher können aus dergleichen angegebenen Stücken nur einerlei Dreiecke gefertiget werden.

§. 69. Zus. Die erste Lage giebt auf der geraden Bb; bei den Punkten C; c ein Paar Winkel ABC = abc; diese sind rechte Winkel (§. 43. II.)

II.) und diese Lage erfolgt bei Dreiecken, die einen rechten Winkel haben, und deren Seiten einzeln gleich sind.

§. 70. Aufg. Einen Winkel FAE fig. 21. in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man schneide in den Schenkeln AE, AF ein Paar willkürlich lange aber gleiche Stücke AB = AC ab, und ziehe BC; auf BC beschreibe man ein gleichschenklichtes Dreieck, dessen Spitze auf der entgegen gesetzten Seite von A, nämlich in D kann genommen werden. Man ziehe AD, so ist ∢ EAD = ∢ FAD.

Bew. Die gegebenen Vorschriften sind alle möglich; denn AB läßt sich um A herumführen, wie ein Halbmesser, und sie wird in der Lage AF die AC = AB geben; so ist die Lage BC, AD möglich (7; II.) und das gleichschenklichte Dreieck aus (§. 56.) die Lage von D kann auch auf der Seite, wo A liegt, zwischen A und BC seyn.

Wenn D innerhalb der Schenkel des Winkels fällt, so hat man Δ ABD ≅ Δ ACD; weil AB = AC; BD = DC und AD ist in beiden ΔΔ gemein, also ∢ EAD = ∢ FAD (§. 67.)

Bew. Daß D innerhalb der Schenkel des ∢ A fällt; man nehme noch D und A auf entgegen gesetzten Seiten der BC; gesetzt D fiele außerhalb; es geschehe auf der Seite, wo AE liegt; in diesem Falle wird CD gewiß die BE schneiden, weil ein Punkt der CD über; der andere, unter BE liegt; CD wird aber auch, vermöge der Annahme, daß BC zwischen A und D liege; zwischen BC und BF fallen, und daher mit BC einen kleinern Winkel als ∢ BCF machen; BD wird BE nicht schneiden, aber so liegen, daß BE zwischen ihr und BC liege; und daher macht

macht BD mit BC einen größern Winkel, als CBE nun ist $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ ACB (§. 59.) also $\measuredangle$ CBE = $\measuredangle$ BCF (§. 45.) Das gleichschenklichte Δ BCD hat daher auf der Grundlinie einen Winkel CBD > $\measuredangle$ BCD; welches wegen (§. 59.) unmöglich ist.

Anmerk. Vom Euklid bis hieher hat man in der obigen Aufgabe die Lage von D innerhalb der Schenkel angenommen, mich dünkt, man dürfte einen geometrischen Zweifel wegen dieser Lage haben, den ich nun gehoben zu haben glaube.

§. 71. Zus. I. Wenn demnach zwei gleichschenklichte Dreiecke auf verschiedenen Seiten einer gemeinschaftlichen Grundlinie BC stehen, so hat eine gerade Linie AD zwischen ihren Spitzen statt, die diese Grundlinie schneidet, denn diese Grundlinie liegt ganz innerhalb der Schenkel des Winkels, der in einer der obigen Spitzen entsteht, wenn man solche Schenkel gehörig verlängt; wie dieses nebst den vorigen AE, AF, auch statt hat, wenn DB, DC verlängt werden.

II. Hätte man den Punkt D auf der Seite, wo A liegt, entweder so genommen, daß D zwischen A und BC; oder daß A zwischen D und BC gekommen wäre, so würde doch der Beweis statt haben. Die 21; II. Figur stellt die Sache dar.

Es sey AB = AC, wie oben (70.) genommen. Man beschreibe über BC das gleichschenklichte Δ BCD, von kleinern Schenkeln BD; CD, als CA, CB sind. Der Punkt D fällt nun entweder zwischen CA; AB oder außerhalb. Es sei das lezte, und zwar liege D oberhalb AB. Nun ist, weil CD zwischen BC und CA liegen muß, $\measuredangle$ BCD < $\measuredangle$

∢ BCA, aber BD liegt, daß BA zwischen ihr und BC liege; und da wäre ∢ CBD > ∢ CBA; aber ∢ CBA = ∢ BCA (§. 59.) folglich im gleichschenklichten Δ CBD der eine Winkel CBD an der Grundlinie größer, als der andere BCD, welches nicht seyn kann; und folglich liegt auch hier D zwischen AB und AC. Zieht man AD so ist Δ BDA ≅ Δ CDA, wegen AD = AD; BA = CA; BD = CD und folglich ∢ BAD = ∢ CAD. Wäre D so genommen, daß zwischen ihm und BC der Punkt A liege, so darf man sich nur statt des in der Figur bezeichneten Punktes A, den Punkt D vorstellen, um die Schlüße in II. anbringen zu können.

§. 72. Aufg. Eine gerade Linie AB fig. 22. in zwei gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man setze auf sie zu beiden Seiten die gleichschenklichten Dreiecke ABC, ABD, und ziehe CD, welche AB in E schneidet, (§. 71.) so ist AE = EB.

Bew. Δ ACD ≅ Δ CDB wie in (§. 70.) also ∢ ACE = ∢ BCE; aber auch AC = CB; folglich Δ ACE ≅ Δ BCE (§. 58.) also AE = EB; weil aber auch ∢ AEC = ∢ BEC; so steht CE auf der so getheilten AB senkrecht.

§. 73. Aufg. Von einem Punkte C außerhalb einer gegebenen unbegrenzten geraden AB fig. 23. eine senkrechte Linie zu fällen.

Aufl. Man beschreibe aus C einen Kreis, der AB in D und E schneide, (§. 37.) und verfertige das gleichschenklichte Δ DCE (§. 29.) Man halbire entweder den Winkel DCE (§. 70.) und ziehe CF oder die Linie DE in F halbirt, und CF gezogen, giebt in beiden Fällen CF auf AB senkrecht.

Bew.

Bew. I. Weil ∢DCF = ∢ECF; DC = EC und CF = CF; so ist der Beweis, wie in (§. 72.).

II. Weil DF = FE; DC = CE; CF = CF, so ist wegen (§. 66.) ∢DCF = ∢ECF; also beide Rechte Winkel (43, II.)

§. 74. Aufg. Aus einem in einer geraden Linie AB gegebenen Punkte F, fig. 23. eine senkrechte Linie zu errichten.

Aufl. Aus F lege man, wie aus einem Mittelpunkte zu beiden Seiten die zwei gleichen FD und FE, dann beschreibe man über DE das gleichschenklichte ΔDCE; und ziehe FC; diese ist die verlangte senkrechte Linie.

Bew. Dieser ist mit II. in (§. 73.) ganz einerlei.

§. 75. Lehrs. In einem jeden ΔABC fig. 24. ist der Winkel CBD, der an einer verlängten Seite AB außerhalb (Außenwinkel) entsteht, größer, als jeder im Dreiecke, der sein Nebenwinkel nicht ist, oder ∢ACB < ∢CBD > ∢CAB.

Bew. Man halbire CB in E (72.) und ziehe aus A die Linie AE; verlänge AE bis EF = AE werde, und ziehe BF. Nun liegt AF zwischen den Schenkeln des Winkels A; aber auch F, und daher BF gewiß auch zwischen CB und BD.

In ΔΔAEC; EFB ist AE = EF; EC = EB nnd ∢CEA = ∢FEB (47.) folglich ∢EBF = ∢ACB; aber ∢EBF < ∢EBD.

Halbirt man AB in G; und zieht CG, und diese verlängt bis in H, daß CG = GH wird, so wird nach eben der Art erwiesen, daß ∢CAG = ∢GBH sey, und ∢GBH < ∢ABI = ∢EBD (§. 47.)

 §. 76.

§. 76. Zus. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD > \sphericalangle ABC + CAB$ auch, ist $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CBD > \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA$. Aber der beiden ersten Größe = ist 180° (§43); Man verlänge AC etwa bis K, so ist $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BCK > \sphericalangle ABC$; daher ist auch hier $\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCK > \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB$; ferner $\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCK > \sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC$; auch hier ist der erstern Summe = 180° = 2 rechten Winkeln; daher betragen in jedem Dreiecke zwei Winkel zusammen immer weniger, als 2 rechte.

§. 77. Zusatz. Daher sind die Winkel an der Grundlinie im gleichschenklichten Dreiecke spitze.

§. 78. Zusatz I. Daher kann in einem Dreiecke nur ein rechter Winkel seyn, und noch weniger kann in einem Dreiecke mehr als ein stumpfer Winkel seyn; in diesen Fällen aber sind die andern beiden spitz. Dieses schränkt das Gesagte (§. 52) gehörig ein.

II. Wenn also nach (§. 51) der rechte Winkel A gegeben ist, und man will das Δ bilden, so muß BC unter einem spitzen Winkel C angelegt werden.

§. 79. Zusatz I. Aus einem Punkte C, fig. 23. außerhalb einer Linie giebts nur eine senkrechte Linie auf diese AB; denn gäben es zwei, so entstände ein Dreieck von 2 rechten Winkeln wider (§. 78.)

II. Aus einem Punkte F in der Linie AB giebts auch nur eine senkrechte Linie, wenn die Ebene, worinn diese senkrechte Linie liegen soll, der Lage nach bestimmt ist. Denn gesetzt, es gäbe noch eine $F\gamma$: so wäre, wenn FC senkrecht ist, $\sphericalangle CFA =$

$\sphericalangle$

$\sphericalangle$ CFB = 90°; aber $\sphericalangle$ γ F B wäre auch = 90° = $\sphericalangle$ C F B + $\sphericalangle$ γ F C, welches nicht seyn kann; man muß aber bei einer so vorhandenen senkrechten Linie ein Dreieck DCE annehmen (74); und wenn sich das Δ DCE um DE dreht, und immer in andere Lagen kömmt, so kömmt CF ohne Zweifel auch in solche andere Lagen; bleibt aber doch immer auf A B senkrecht; also giebt es keine zwei senkrechte Linien, die mit AB in der nämlichen Ebene lägen; nur zeigt das gedrehte Dreieck, daß es in F unzählig viele senkrechte Linien gebe, wenn solche in andern Ebenen liegen.

§. 80. Lehrsatz I. In jedem Δ ABC fig. 25 steht der größern Seite auch ein größerer Winkel gegenüber II. Dem größern Winkel liegt eine größere Seite gegenüber, das heißt: wenn in (I) CB > AC so ist $\sphericalangle$ A > $\sphericalangle$ B und in II. Wenn $\sphericalangle$ A > $\sphericalangle$ B, so ist C B > A C.

Bew. I. CB > AC; man mache ein Stück von CB, nämlich CD = AC, und ziehe AD; diese AD liegt gewiß zwischen den Schenkeln des Winkels C A B, und theilt daher den Winkel CAB in zwei Winkel. Nun ist $\sphericalangle$ CDA = $\sphericalangle$ CAD (§. 59); aber $\sphericalangle$ CAD < $\sphericalangle$ CAB, folglich auch $\sphericalangle$ CDA < $\sphericalangle$ CAB, aber $\sphericalangle$ CDA > $\sphericalangle$ B (§. 75) also ist noch viel mehr $\sphericalangle$ B < $\sphericalangle$ CAB.

II. $\sphericalangle$ A > $\sphericalangle$ B; man mache $\sphericalangle$ DAB = $\sphericalangle$ B (§ 68 II.) so liegt DA innerhalb der Schenkel des Winkels A, und trift die BC; es sey in D, so ist AD = DB (§ 62). Nun ist CD + AD > CA (§ 54), also CD + DB = CB > CA.

§. 81. Zusatz. Weil im rechtwinklichten △ der rechte Winkel der größte ist (§ 78), so ist die ihm gegenüber liegende Seite (Hypothenuse) die größte.

§. 82. Zusatz. I. In fig. 26 sey aus C die Linie C A auf E D senkrecht; C B, C D schief, so ist C B > C A (§ 80), folglich ist die senkrechte Linie aus einem Punkte außer einer Linie die möglichst kürzeste unter allen, die aus diesem Punkte bis an die gedachte Linie können gezogen werden.

II. Weil ∢ CBD stumpf ist (§ 78), so ist im △ C B D die C D > C B, d. h. die, von der senkrechten entfernter liegende schiefe Linie ist immer größer, als die näher liegende, wenn übrigens senkrechte und schiefe aus einem Punkte auf eine Linie gezogen werden.

§. 83. Zusatz. Wird aus C ein Kreis mit mit dem Halbmesser C D = C E beschrieben, so liegen E; D im Kreise. Alle Linien aus C auf A B, die zwischen C D und C E fallen, sind kleiner als C E, und C D; ihre Punkte, die sie in A B haben, liegen also innerhalb des Kreises (§ 30 I.); daher schneidet der Kreis diese Linie A B zwischen E und D nicht. Linien auf A B, die außerhalb C D, C E liegen, sind länger, als C E und C D (82. II.); daher ihre Endpunkte in A B außerhalb des Kreises liegen (§ 30. II.); also schneidet der Kreis auch außerhalb der Punkte D, E die Linie A B nicht mehr; folglich wird eine gerade Linie vom Kreise nur in zween Punkten geschnitten.

§. 84. Zusatz. Der Abstand eines Punktes von einer Linie kann nur ein einziger seyn; folglich

lich wird er durch die senkrechte Linie gemessen; denn schiefe Linien geben immer andere und andere Abstände.

§. 85. Lehrsatz. I. Wenn in zween dreiecken A B C, fig. 14, I. und a b c, fig. 14, II. zwo Seiten gleich sind, nämlich A B = a b; B C = b c aber der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel A B C im einen Dreiecke größer ist, als der eben so eingeschlossene Winkel a b c im andern Dreiecke; so sind die, diesen Winkeln gegenüber liegenden Seiten in der nämlichen Ungleichheit; oder es ist dann A C > a c.

II. Sind, wie oben so ein Paar Seiten gleich; aber die Dritte A C > a c, so sind die gegenüberliegenden Winkel in der nämlichen Ungleichheit; oder ist dann auch ∢ A B C > ∢ a b c.

Bew. für I. Man mache aus dem Winkel a b c einen, der = ∢ A B C ist (67. II.) der Schenkel b ∂ fällt offenbar, weil ∢ a b ∂ = ∢ A B C > ∢ a b c ist, außerhalb des Dreieckes a b c; man mache den Schenkel b ∂ so groß als b c; und so kann der Punkt entweder D, oder d, oder ∂ seyn, d. i.: dieser Punkt hat in Absicht des Punktes c eine solche Lage, daß von ihm nach a eine Linie a D gezogen, den Punkt c außerhalb des Δ a b D setze, oder daß c in die Linie a d falle, oder daß, wenn a ∂ gezogen ist, c innerhalb des Dreieckes a b ∂ falle.

Für die erste Lage ist wegen der angenommenen Bedingniß, und der Verzeichnung der gleichen Winkel das Dreieck A B C ≅ Δ a b D; und a D = A C. Aber weil b c = b D, so ist ∢ b c D

$= \sphericalangle\, bDc$ (59). Nun liegt aber in dieser ersten Lage aD näher an bD als cD; daher ist $\sphericalangle\, bDc = bcD > aDc$; setzt man $\sphericalangle\, bcD + \sphericalangle\, acb = \sphericalangle\, acD$ statt bcD, so ist noch um so mehr $\sphericalangle\, acD > \sphericalangle\, aDc$; daher $aD > ac$ (86. II.) und folglich auch $AC > ac$.

Für die zweite Lage ist aus den obigen Gründen auch $\Delta\, ABC \cong \Delta\, abd$ und $AC = ad$; aber weil ac verlängt in d trifft, so ist gewiß $ac < ad = AC$.

In der dritten Lage ist wieder $\Delta\, ABC \cong \Delta\, ab\partial$, und $AC = a\partial$; auch ist wie vorhin $\sphericalangle\, b\partial c = \sphericalangle\, bc\partial$, und nach der Annahme liegt $c\partial$ näher an $b\partial$, als $a\partial$; daher ist $\sphericalangle\, c\partial a < \sphericalangle\, b\partial a = \sphericalangle\, bc\partial$; aber $\sphericalangle\, bc\partial$ ist spitz (77); daher bc in m verlängt, giebt ∂cm schon stumpf (43. III.); also ist um so mehr $\partial cm > c\partial a$ und gewiß um so mehr $\sphericalangle\, \partial cm + \sphericalangle\, acm = \sphericalangle\, \partial ca > c\partial a$, und daher $a\partial = AC > ac$.

II. Es sey $AB = ab$, $BC = bc$; aber $AC > ac$, so ist $\sphericalangle\, ABC > \sphericalangle\, abc$; denn einer von diesen dreien Fällen muß wahr seyn: 1) entweder $\sphericalangle\, ABC = \sphericalangle\, abc$, oder 2) $\sphericalangle\, ABC < \sphericalangle\, abc$, oder 3) $\sphericalangle\, ABC > \sphericalangle\, abc$. Wäre das erste, so wäre $\Delta\, ABC \cong abc$ und $AC = ac$, welches der Annahme $AC > ac$ widerspricht. Wäre $\sphericalangle\, ABC < \sphericalangle\, abc$, so müßte $AC < ac$ seyn (I), welches wieder nicht seyn kann; folglich da 1. und 2. nicht seyn können, so ist $\sphericalangle\, ABC > acb$.

Anmerk. Ich glaube in dem Beweise für I die Unvollständigkeit des 24 Satzes im ersten Buche beim Euklid gehoben zu haben.

§. 86.

§. 86. Lehrsatz I. Im gleichschenklichten Dreiecke giebt es allemal eine senkrechte Linie aus der Spitze auf die Grundlinie, die diese halbiret. II. Eine Linie aus der Spitze auf die Mitte der Grundlinie steht auf dieser senkrecht. III. Eine Linie, die den Winkel in der Spitze halbiret, halbirt auch die Grundlinie, und wenn einer dieser drei Sätze wahr ist, so sind es die andern zwei. IV. Auf der Mitte der Grundlinie eine senkrechte Linie trift, gehörig verlängt, in die Spitze.

Bew. Es sey DCE fig. 23. gleichschenklicht; die senkrechte Linie aus C fällt entweder zwischen beide Schenkel, oder außerhalb. Es sey das letzte, so entsteht, ein Δ CEB, welches bei E einen stumpfen (§ 77) und bei B einen rechten Winkel hat, welches unmöglich ist; also fällt CF innerhalb, und es entstehen 2 rechtwinklichte Dreiecke DCF, ECF. Man lege sie so auf einander, daß CE die CD und ∢ CEF den ∢ CDF decke, so liegt der Punkt F, der zu EF gehört, entweder näher an D als F, der zu DF gehört, oder weiter, oder diese Punkte fallen auf einander. Der erste und zweite Fall ist aber unmöglich, weil es sonst aus C zwei senkrechte Linien auf DF geben müßte; wider (§ 80); also ist die dritte Lage wahr, und so decken die Dreiecke, und DF = FE; auch ∢ DCF = ∢ ECF.

II. Es sey DF = FE; man ziehe CF, so ist Δ DCF ≅ Δ ECF (§ 66); also ∢ CFD = ∢ CFE, d. i. CF senkr. auf DE (43, II), und auch hier ist ∢ DCF = ∢ ECF.

III. Wenn $\sphericalangle$ DCF $=$ $\sphericalangle$ ECF, so ist Δ DCF $\cong$ Δ ECF (§ 58); folglich DF $=$ FE und $\sphericalangle$ CFD $=$ $\sphericalangle$ CFE $= 90°$ (43).

IV. Wenn FC in der Mitte der DE senkrecht ist, und nicht in C trift, so gäbe es aus C eine andere senkrechte auf DE (I.), die auch in F dem Punkte in der Mitte eintrift, also gäbe es in F zwo senkrechte, die mit DE in einer Ebene liegen, welches wegen (§ 79. II.) unmöglich ist.

§. 87. Lehrsatz. Wenn in zwei rechtwinklichten Dreiecken ACB, acb fig. 27. gleich sind die Seite BC $=$ bc (Hypothenusen) und eine Seite AC $=$ ac am rechten Winkel (Kathet), so ist Δ ACB $\cong$ Δ acb.

Bew. Man lege AC auf ac, daß jedoch BC und bc auf verschiedenen Seiten liegen, so fallen AB und ab in eine gerade Linie (§ 44.) und das Δ BCb ist gleichschenklicht, und aus seiner Spitze die senkrechte CA oder ca, daher AB $=$ ab (§ 86. I.) und also die ganzen Dreiecken gleich (§ 66).

§. 88. Lehrsatz. Wenn innerhalb eines Dreieckes ABC fig. 28. I. ein Punkt D angenommen wird, und von ihm an die Endpunkte einer Seite AB gerade Linien AD, BD gezogen werden, so ist 1) AC $+$ CB $>$ AD $+$ DB, d. h. die umschließenden Seiten sind größer, als die umschlossenen. 2) $\sphericalangle$ ADB $>$ $\sphericalangle$ ACB, d. h. der umschlossene Winkel ist größer, als der umschließende.

Bew. Man verlänge AD; sie trift gewiß BC; es sey in E. Nun ist AC $+$ CE $>$ AD $+$ DE (§. 54. fig. 28. I.) und EB auf beiden Seiten

ad-

addirt, giebt A C + C B > A D + D E + E B; aber im Δ DEB ist DE + EB > DB (54); setzt man nun oben rechter Hand statt DE + EB die kleinere DB, so ist noch viel mehr A C + CB > AD + D B.

II. ∢ DEB > ∢ ACB (§ 76) aber ∢ ADB > ∢ DEB (daselbst), also noch vielmehr ∢ ADB > ∢ ACB.

Von Parallellinien.

§. 89. Erklärung. Zwo gerade Linien, auf einer einzigen Ebene gezogen, heißen parallel (gleichlaufend), wenn sie überall gleichweiten Abstand von einander haben.

§. 90. Zusatz. Also können Parallellinien, bei jeder Verlängung nicht zusammenstoßen; und umgekehrt, stoßen ein Paar Linien, die sonst in einer Ebene liegen, bei jeder Verlängung nicht zusammen, so sind sie parallel.

§. 91. Anmerk. Der Begriff vom Abstande zwoer Linien ist seiner Natur nach unbestimmt; denn bei geneigten Linien ist er im Winkelpunkte = o, und wächst, wenn man weiter in den Linien fortgeht: welches freilich erst weiter unten zur Gewißheit gebracht werden kann. Wer also fodert, den Abstand zwoer Linien anzugeben, der fodert etwas Unbestimmtes. Man könnte aber 1) fodern, wie weit ein Paar Linien an bestimmten Orten in ihnen, entfernt seyen, und da ist deutlich, daß man nach dem Abstande von ein Paar Punkte frage, und die Auflösung geschieht nach (9).

2) Giebt man nur in einer Linie den Ort (Punkt) an, bei welchem man den Abstand beider Linien bestimmen

men soll, so kann die Foderung nichts anders seyn, als den Abstand eines Punktes von einer Linie anzugeben, und geschieht nach (§ 84).

§. 92. **Aufgabe.** Eine Linie GH fig. 28. II. mit einer andern, der Lage nach gegebenen AB, parallel zu legen.

Auflösung. An zweien verschiedenen Punkten C, D errichte man CE, DF senkrecht (§ 75); jedoch, daß beide senkrechte Linien mit AB in eine Ebene fallen, und mache sie gleich, d. i. CE = DF (§ 7. I.). Man lege durch die Punkte E; F, die gerade GH; diese ist mit AB parallel.

Bew. GH liegt mit AB in einer Ebene, und es sind zween Punkte in ihr, die gleichweit von AB abstehen; also ist die Lage der ganzen Linie GH gleichweit abstehend (§ 7. IV.)

§. 93. **Zusatz.** Wenn ein Paar Linien gleichlaufend sind, so sind die senkrechten Linien, wie oben EC, DF gleich, die aus Punkten der einen, auf die andere fallen.

§. 94. **Zusatz.** I. Gleiche senkrechte Linien nach (93) gezogen, bestimmen einerlei Lage von Parallinien; und umgekehrt:

II. Durch einen gegebenen Punkt außer einer gegebenen Linie giebt es nur eine Parallele mit dieser gegebenen Linie (§ 79).

§. 95. **Lehrsatz.** Wenn AB, GH gleichlaufend sind, und man zieht FD aus F senkrecht auf AB, so steht diese FD auch senkrecht auf GH.

Bew.

Bew. Gesetzt FD sey nicht senkrecht auf GH, sondern schief, und es sey DFH stumpf, so ist ∠ DFG spitz (43); also ist hier ein rechtwinklichtes Dreieck, das bei D einen rechten Winkel, und bei F den einen spitzen hat, möglich (§ 78. II.); folg. würde die Linie GH mit AB zusammen stoßen, und wäre nicht parallel, welches doch angenommen war.

§. 96. Zusatz. Daher sind senkrechte Linien zwischen Parallellinien gleich, wenn sie auch wechselweise auf beide senkrecht gezogen wären.

§. 97. Lehrsatz. Wenn zwo gerade auf einer Ebene liegende Linien AB, CD fig. 29. von einer dritten geraden EF geschnitten werden, und es sind 1) die zween innern auf einer Seite der schneidenden EF liegenden Winkel $u+y=180°$, oder 2) $o=y$ (äußerer und innerer Winkel auf der nämlichen Seite der schneidenden EF); oder 3) $x=y$ (Wechselwinkel, d. i. solche, die innerhalb, aber auf beiden Seiten der schneidenden EF liegen; so sind, wenn einer dieser drei Sätze wahr ist, es die andern beiden auch; in jedem Falle aber AB; CD gleichlaufend.

Bew. I. $u+y=180°=u+o$, (43) daher $y=o$; aber $o=x$ (47), also auch $x=y$. Wenn aber $u+y=180°$, so können die Linien auf der Seite, wo B, D liegt, nicht zusammen stoßen, wegen (§76). Nun ist $y+z=180°=x+z$; also können auch die Linien auf der Seite, wo A, C liegt, nicht zusammen stoßen, und sie sind daher gleichlaufend (90).

II. Wenn $o = y$; so addire man auf beiden Seiten u, so ist $o + u = y + u$; aber die erste Summe $= 180^{\circ}$, also auch die letzte Summe; folglich sind wegen der letzten Summe A B, C D parallel; und auch $o = x$; ferner $x = y$, weil wieder die Schlüße in I Statt haben.

III. Wenn $x = y$, so ist, wie in II. $x + u = y + u = 180^{\circ}$, und daher, wie dort, A B und CD parallel; auch $y = o$.

§. 98. Zusatz. Wenn y bleibt, so läßt sich in der, gegen D unbegrenzten H D ein Punkt, wo man will, annehmen, zu welchem aus G eine Linie gezogen, ein Dreieck bildet. Diese Linie von G in den angenommenen Punkt, muß zwischen die Schenkel des Winkels u fallen, weil u kleiner werden muß (§ 76), sie heißt gegen H D geneigt (convergit).

§. 99. Zusatz I. Wenn bei Linien, die so, wie die (§ 97) von einer Dritten geschnitten werden, andere Bedingungen Statt finden nämlich die zween innern Winkel $<$ oder $>$ 180°, so können sie nicht mehr gleichlaufend seyn. Es sey a b eine Linie, an welcher $\measuredangle$ H G b $+ y < 180^{\circ}$; oder $\measuredangle$ G H b $< \measuredangle$ H G B, so fällt gewiß G b zwischen die Schenkel des $\measuredangle$ H G B, und ist daher auf dieser Seite geneigt; und wenn sie gehörig verlängt wird, so schneidet sie die H D.

II. Die Linie a b muß auf der Seite gegen A über A G zu liegen kommen; denn die Winkel auf ihr, die ihre Spitzen in G haben, machen 180°, so, wie es $x + u$ machten; da nun der Winkel, den

G b

G b mit H G macht, kleiner als u seyn muß, und zwar um den Winkel BGb, so muß x eine Vermehrung erhalten, es muß ein Winkel AGa = bGB zu x kommen; also fällt a G so, daß A G zwischen sie und GH falle. Man sagt bei diesen Umständen aG gehe auf der Seite, wo A liegt, mit CD aus einander, (divergit).

III. Wenn man auf CD senkrechte Linien bis an AB errichtet, die dieser Parallellinien Abstand geben (§ 94), so treffen solche die ab rechter Hand der G H eher, als sie GB erreichen; also liegen alle Punkte der ab rechter Hand von G, näher X als die Punkte der GB (§ 91). Auf der linken Seite aber von G findet das Gegentheil wegen (II.) aus den nämlichen Gründen Statt.

IV. Wenn eine Linie ab eine von zwo Parallellinien (hier A B) schneidet, so schneidet sie gehörig verlängt, auch die andere.

V. Durch einen Punkt G giebt es mit C D nur eine Parallele; sie sey A B; so wird jede andere a b sie beide schneiden.

§. 100. Zusatz. Zwo Linien auf einer dritten senkrecht, sonst aber in einer Ebene, laufen parallel, wegen (§ 97. I).

§. 101. Zusatz I. Eine Linie C D mit einer AB der Lage nach gegebenen Linie, gleichlaufend zu ziehen, lege man F E, die mit A B einen willkürlichen Winkel x mache; man mache in einem willkürlich angenommenen Punkte H der E F einen Winkel y = x, und ziehe HD, die man nach Willkür zu beiden Seiten von H verlängen kann, und

so

so ist HD parallel mit AB (§ 97. III); diese Auflösung ist einfacher als (§ 92).

II. Ist der Punkt H ausser der AB gegeben, und durch ihn soll CD gelegt werden, so geschieht alles, wie in (I), nur wird EF durch H gezogen. Die leichteste Auflösung scheint zu seyn, wenn von H auf AB ein Perpendikel gelassen wird, auf dem denn die CD wieder senkrecht gezogen wird; mit beständiger Beobachtung, daß AB; CD in einer Ebene liegen.

§. 102. Lehrsatz. Wenn zwo gleichlaufende Linien AB, CD fig. 30. von einer dritten EF geschnitten werden, so sind 1) die Wechselwinkel gleich, 2) der äußere gleich dem innern, 3) die zween innern machen zusammen 180°.

Beweis. Man lasse von den Punkten G, H, wo EF einschneidet, GK auf AB; HI auf CD senkrecht; diese sind gleich (§ 96), und GH = GH; daher Δ HIG ≅ Δ HGK (§ 87); folglich

I. ∢ GHK = ∢ HGI.

II. Weil ∢ HGI = ∢ FGD (§ 47), so ist ∢ FGD = ∢ GHK.

III. ∢ FGD + ∢ HGD = 180° (43); also auch ∢ GHK + ∢ HGD = 180°.

§. 103. Zusatz. I. Wenn eine Linie ik fig. 31 zwischen zwo gleichlaufende gh, lm so gelegt wird, daß sie mit einer gh parallel sey, so ist sie es auch mit der andern; denn x = t (§ 102. I); aber t = w (II), folglich x = w, und daher ik parallel mit lm (§ 97. III).

II.

II. Wenn an Parallellinien einer von den innern Winkeln ein rechter ist, so ist es der andere auch.

§. 104. Lehrsatz. In jedem Δ ABC fig. 32 machen die drei Winkel zusammen 180° oder zween rechte Winkel.

Beweis. Man lege durch C die Linie CD parallel mit AB (§ 101), so ist $p + o + r = 180^\circ$ (§ 102. III), $= p + o + q$, weil $r = q$ (§ 102. I).

§. 105. Zusatz. Wenn man eine Seite, wie CA verlängt, so ist der Außenwinkel s so groß, als die beiden innern $o + p$, wovon keiner sein Nebenwinkel ist; denn $p + o + q = 180^\circ = s + p$, daher $o + q = s$. (Rechenk. 337, b).

§. 106. Zusatz I. Wenn man die Größe zweier Winkel eines Dreieckes weiß, so findet sich der dritte durch Rechnung. Es seyen die zween Winkel p und q bekannt, so ist $r = 180^\circ - o - p$.

II. Weiß man einen, so weiß man die Summe der andern beiden; weil auch hier $180^\circ - p = o + r$, obschon hieraus weder r noch o einzeln bestimmt werden kann.

§. 107. Zusatz I. Wenn in zweien Dreiecken zween Winkel in dem einen, einzelnen, oder zusammen genommen, so groß sind, als im andern, so ist jedesmal der dritte Winkel im einen, dem dritten im andern Dreiecke gleich. Im ersten Falle aber sind die drei Winkel beider Dreiecke einzeln gleich.

II. Sind zween Winkel eines Dreieckes zusammen größer oder kleiner, als die Summe zweier

in

in einem andern Dreiecke, so ist der dritte Winkel in diesem andern Dreiecke kleiner oder größer.

§. 108. Zusatz I. In jedem Dreiecke kann nur ein rechter, oder auch nur ein stumpfer Winkel seyn; und ist dieses, so sind die andern beiden spitz.

II. Die zween spitzen Winkel im rechtwinklichten Dreiecke machen zusammen noch einen rechten Winkel.

III. Ist ein rechtwinklichtes Dreieck gleichschenklicht, so ist jeder spitze Winkel $= 45°$.

IV. Wird einer von den zween spitzen Winkeln größer, so muß der andere kleiner werden, und umgekehrt.

Von Vierecken.

§. 109. Erklärung. Die Möglichkeit eines Viereckes erhellet so: Man nehme in zwo Seiten AB, CB eines Dreieckes A B C fig. 33. willkürlich die Punkte D, E und ziehe E D; sind zwo Linien parallel, wie LM, KN fig. 34. so lassen sich willkürlich die Punkte K, N, M, L annehmen, und LK, M N ziehen. Diese beiden Vierecke heissen Trapezien (unrichtige Vierecke), das letztere auch Paralleltrapezium. Sind jede zwo gegen überstehenden Seiten eines Viereckes, wie in den fig. 35, 36, 37, 38, parallel; so heißt es: Parallelogramm, und zwar schief oder rechtwinklicht, wenn ein schiefer Winkel, wie A fig. 35. und e fig. 38. oder ein rechter wie a fig. 36. und E fig. 37. darin ist. Sind, wie in fig. 37, 38 alle vier Seiten gleich, oder auch nur zwo anliegenden, so heißt das erste ein

ein Quadrat, das zweite Raute (Rhombus, verschobenes Quadrat). Sind die gegen überliegenden Seiten, wie fig. 35, 36, oder auch zwo gegen überliegenden gleich, so heißt fig. 36. Rechteck (Rectangulum, länglichtes Quadrat) und fig. 35 eine länglichte Raute (Rhomboides).

§. 110. Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke, wie die fig. 35, 36, 37, 38 jede zwo gegenüberliegenden Seiten gleich sind, so sind 1) diese gegenüberliegenden Seiten parallel; 2) sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

Beweis I, Man ziehe AD fig. 35., so ist Δ ACD $\cong \Delta$ ADB (§ 66); daher p = o und AC parallel mit BD, und weil auch y = x, so ist AB parallel CD (§ 97).

II. Wegen der Gleichheit der dreiecke ist $\sphericalangle$ C = $\sphericalangle$ B; ferner p + y = o + x; oder $\sphericalangle$ A = $\sphericalangle$ D.

§. 111. Zusatz. Wenn alle vier Seiten eines Viereckes gleich sind, so ist der Satz gewiß auch wahr.

§. 112. Zusatz. Wenn ein Winkel in einem Parallelogramm, oder in einem solchen Vierecke, wie oben (§ 110) ein rechter ist, so sind sie es alle vier; denn, es sey E = 90°, so ist E = H = 90°; aber F = 180° — E = 90° (§ 102) = G.

§. 113. Zusatz. Wenn man daher in einem solchen Vierecke einen Winkel weiß, so weiß man sie alle vier; denn A bekannt, giebt D; und B = 180° — A (§ 102) = C.

§. 114. Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten parallel sind, so sind sie I auch gleich, auch sind II die gegenüberliegenden Winkel gleich.

Beweis I. Es sey A C parallel B D; A B parallel C D; fig. 35. man ziehe A D, so ist p = o; y = x (§ 102. I) daher Δ A B D ≅ Δ A C D (§ 61.) folglich A C = B D, und A B = C D. Aber hieraus folgt auch für II) ∢ C = ∢ B, und und weil p + y = o + x, auch ∢ A = ∢ D.

§. 115. Zusatz I. Der obige Satz kann daher auch unter dieser Allgemeinheit gemerkt werden: Parallellinien zwischen Parallellinien sind gleich.

II. Wenn man weiß, daß, wie fig. 37. E G = G H, oder fig. 38. e g = g h, so sind in einem solchen Vierecke, worinn die Bedingniß (§ 114.) statt hat, alle vier Seiten einander gleich.

§. 116. Zusatz. Die Sätze (§ 112, 113) haben auch bei dem Vierecke (§ 114) statt, so, wie 114 der umgekehrte Satz von (§ 110) ist.

§. 117. Lehrsatz. Wenn in einem Vierecke zwo gegenüberliegende Seiten parallel und gleich sind, so sind es I auch die zwo andern, II auch die gegenüberliegenden Winkel sind gleich.

Beweis I. A B; C D fig. 35. sollen die genannte Beschaffenheit haben; man ziehe A C, B D um das Viereck zu haben. Man lege A D; so ist y = x (§ 102. I); und Δ A D B ≅ Δ A C D (§ 58); folglich A C = B D; und weil auch p = o, so ist A C parallel B D (§ 97).

 II.

II Für die Gleichheit der Winkel ist der Beweis, wie in (§ 110, II).

§. 118. Zusatz. Der gegenwärtige Satz, nebst (114; 110) geben die Merkmale an, unter welchen ein Viereck ein Parallelogramm sey. Man giebt überhaupt folgende Erklärung vom Parallelogramm: Ein Viereck, dessen gegenüberstehende Seiten parallel und gleich, auch dessen gegenüberliegende Winkel gleich sind; allein die genannten Sätze zeigen, wie viele Eigenschaften da seyn müßen, um auf das übrige in der Erklärung enthaltene zu schließen.

§. 119. Zusatz. Ein jedes Parallelogramm wird von A D, einer Linie in gegenüber liegende Winkel gezogen, in zwei übereinstimmende Dreiecke getheilt. A D heißt Diagonallinie.

§. 120. Zusatz. Zwei gleiche und ähnliche Dreiecke geben, gehörig an einander gelegt, ein Parallelogramm; daher ist jedes Dreieck ein halbes Parallelogramm.

§. 121. Zusatz I. Soll ein Parallelogramm von einer bestimmten Gestalt und Größe beschrieben werden, so muß ein Winkel, nebst zwo Seiten gegeben seyn. Aus diesen Stücken läßt sich ein Dreieck, wie A C D, fig. 35 beschreiben; wenn A C; C D; und ∢ C gegeben sind; und noch eines, worin B D = A C; A B = C D, kann auf der gemeinschaftlichen A D beschrieben werden. Weil aber erwiesen ist, daß aus solchen Stücken nur einerlei Dreieck beschrieben werden kann (§ 69. II), so muß auch das daraus entstandene Parallelogramm nur ein einziges, und daher ein bestimmtes werden.

II. Sind die beiden Linien gleich, oder ist nur eine Linie gegeben, so wird das Parallelogramm eine Raute, wenn der gegebene Winkel schief ist. Ist er aber ein rechter, so entsteht das Quadrat. Bei ungleichen Seiten und dem rechten Winkel entsteht das Rechteck; sonst die länglichte Raute.

Winkel, die am Kreise, und in der Kreisfläche entstehen.

§. 122. Lehrsatz. Der Winkel BCD, fig. 39, 40, 41. am Mittelpunkte des Kreises ist zweimal größer, als der Winkel BAD am Kreise selbst, (Kreiswinkel), wenn beider Schenkel an den Endpunkten des nämlichen Bogens BD stehen.

Beweis. I Lage fig. 39, wenn ein Schenkel des Kreiswinkels der Durchmesser AD ist. Im gleichschenklichten Δ CAB ist ∢ BAC = ∢ ABC (§ 59). Nun ist ∢ BCD = ∢ BAC + ∢ ABC (§ 105) = 2 ∢ BAC.

II Lage, wenn die Schenkel BA; AD fig. 40 Sennen zu beiden Seiten des Durchmessers ACE sind.

Aus (I) ist ∢ BCE = 2 ∢ BAE; und ∢ DCE = 2 ∢ DAE, also ∢ BCE + ∢ DCE = 2 ∢ BAE + 2 ∢ DAE; oder wenn man die Ganzen statt ihrer Theile setzt ∢ BCD = 2 ∢ BAD.

III Lage, wenn die Schenkel BA, BD fig. 41 auf einer Seite des Durchmessers liegen.

Wegen (I) ist hier ∢ BCE = 2 ∢ BAE; aber auch ∢ DCE = 2 ∢ DAE; folglich der Winkel

kel BCE — ∢ DCE = 2 ∢ BAE — 2 ∢ DAE (Rechenk. 337 b), d. i ∢ BCD = 2 ∢ BAD.

§. 123. Zusatz. Des Winkels BCD Maß ist der Bogen BD (§ 42); so muß der halbe Bogen zwischen den Schenkeln des Kreiswinkels desselben Maß seyn.

§. 124. Zusatz. I. Ein Kreiswinkel, dessen Schenkel an beiden Enden des Durchmessers, und daher auf dem halben Kreise stehen, ist ein rechter; denn sein Maß ist $\frac{1}{2}$. 180° = 90°.

II. Ein Kreiswinkel, dessen Schenkel auf einem kleinern Bogen, als einem halben Kreise stehen, ist spitz; der aber, dessen Schenkel auf einem größern Bogen, als auf dem Halbkreise stehen, ist stumpf.

§. 125. Zusatz. Kreiswinkel, wie A, B, ferner C, D, fig. 42. d. i. solche, zwischen deren Schenkeln einerlei Bogen enthalten ist, sind gleich; denn ihr Maß ist einerlei (123).

§. 126. Lehrsatz. Bögen zwischen parallelen Sennen eines Kreises sind gleich.

Beweis. AB par. CD, fig. 43; man ziehe AD, so ist ∢ BAD = ∢ ADC (§ 102); folglich der Bogen BD = Bogen AC (§ 123).

§. 127. Lehrsatz. I gleiche Sennen eines Kreises gehören II zu gleichen Bögen oder zu gleichen Winkeln vom Mittelpunkte; und die Halbmesser von den Endpunkten gleicher Bögen geben III gleiche Winkel am Mittelpunkte; und wenn einer von diesen dreien Sätzen wahr ist, so sind es allemal die beiden andern.

Beweis. I Es sey fig. 44 die Senne AB = Senne DE; man ziehe AC; BC; DC; EC; so ist △ ACB ≅ △ DCB (§ 66), folglich ∢ ACB = ∢ DCE.

Man lege den Ausschnitt ACB auf den Ausschnitt DCE, daß die genannten Winkel einander decken, so fällt D auf A, und E auf B; weil auch nebst der Gleichheit der Winkel AC = DC = BC = EC. Es sind aber die Bögen vom nämlichen Kreise (§ 35), und decken daher ganz einander, oder der Bogen AB = Bogen DE.

II. Es sey ∢ ACB = ∢ DCE; und die Schenkel bis an den Kreis verlängt; nun wird nach eben der Art, wie oben der Ausschnitt ACB auf den Ausschnitt DCE gelegt, so müßen die Bögen aus dem angeführten Grunde einander decken. Daß aber auch die Sennen einander decken, folgt, weil ihre Endpunkte auf einander fallen (§ 7. II); aber betrachtet man die Sache für sich, indem man die Sennen zieht, nachdem die Schenkel der Winkel in den Kreis bei A; B; D; E eingeschnitten haben, so werden die Dreiecke ACB; DCE gleich (§ 66).

III. Es sey der Bogen AB = Bogen DE. Man ziehe aus den Endpunkten der Bögen die Halbmesser. Legt man die Bögen auf einander, so müßen die Halbmesser wegen (I, II) auf einander fallen, und ∢ ACB = ∢ DCE (§ 19); und die Sennen sind aus den nämlichen Gründen, wie in II, gleich.

§. 128. Lehrsatz. I. Die senkrechte Linie aus dem Mittelpunkte auf die Senne halbirt sie, und verlängt, auch den Bogen.

II. Eine Linie auf der Mitte der Senne senkrecht halbirt auch den Bogen, und geht durch den Mittelpunkt.

III. Eine Linie, die den Bogen halbirt, und nach dem Mittelpunkt geht, halbirt die Senne, und steht auch senkrecht auf ihr.

Beweis. I. Es sey fig. 45 CE aus dem Mittelpunkte C senkrecht auf AB, so ist ΔCAE ≅ ΔCBE (§ 88), also AE = EB; bekanntermaßen gehört die Senne AB zu beiden Bögen ADB und AFB. Man verlänge CE auf der einen Seite bis in D, auf der andern bis in F. Nun ist aus dem oben gegebenen Beweise ∢ ACD = ∢ BCD, folglich der Bogen AD = Bogen DB (§ 127, II). Weil 180° − ∢ ACD = ACF und 180° − ∢ BCD = ∢ BCF (§ 45), so ist ∢ ACF = ∢ BCF, und daher der Bogen AF = Bogen BF.

II. Es sey AE = EB, und EC senkrecht auf AB. Man verlänge CE bis in D und F; ziehe AD, DB, dann AF, BF; so ist das Δ ADE ≅ Δ DBE (58), und AD = BD; folglich auch der Bogen AD = Bogen BD (§ 127). Nach eben der Art zu schließen ist Δ AEF ≅ Δ BEF; und daher der Bogen AF = Bogen BF. Nun ist der Bogen AD + Bogen AF = Bogen DAF = Bogen DB + Bogen BF = Bogen DBF; daher theilt die gerade Linie DF den ganzen Kreis in zwei gleiche Theile, und ist der Durchmesser (§ 34), oder (welches eben das ist) sie geht durch den Mittelpunkt.

III. Der Bogen AD = DB; DC, die nach dem Mittelpunkte geht, treffe die Senne in E oder FC verlängt in E; man ziehe AC, CB; so ist ∢ ACD = ∢ DCB (§ 127, III.); daher Δ ACE ≅ Δ BCE (§ 58), und AE = EB; aber auch ∢ AEC = ∢ BEC; folglich CE senkrecht auf AB (§ 43, II). Hätte man den Bogen AFB in F in zween

 glei-

gleiche Theile getheilt, und die gerade F G E gezogen, so ist aus den nämlichen Gründen △ F C B ≅ △ F C A; daher ∢ A F E = ∢ B F E; da ferner F B = F A (§ 127, II); E F = E F; so ist auch △ A F E ≅ F B E (§ 58); und A E = E B aber auch bei E rechte Winkel, wie oben.

§. 129. Zusatz. Einen Bogen zu halbiren, halbirt man seine Senne (§ 72) durch eine senkrechte Linie; diese verlängt, halbirt den Bogen (§. 128, II.).

§. 130. Zusatz. Den Mittelpunkt in einem gegebenen Kreise zu finden, zieht man eine Senne; halbirt sie durch eine senkrechte Linie, diese senkrechte Linie, zu beiden Seiten an den Kreis verlängt, ist der Durchmesser (§ 128, II), in dessen Mitte der Mittelpunkt ist (§ 29).

§. 131. Zusatz. Zween Durchmesser senkrecht auf einander, theilen den Kreis in vier gleiche Theile (vier Quadranten § 127, III). Man kann aber jeden Quadranten wieder halbiren, und diese Hälfte abermal u. s. w.; daher läßt sich der Kreis geometrisch in 2, 4, 8, 16, 32, u. s. w., gleiche Theile theilen; d. i: nach Potenzen der 2 (Rechenk. § 137).

Macht man einen Winkel durch Hilfe der Instrumente (51 Anmerk.) an den Mittelpunkt, der ein bekanntes Verhältniß zu 360° hat, so verhält sich auch eben so der Bogen im Kreise zum ganzen Kreise (§ 42); und man kann nach (§ 127, I) lauter diesem gleiche Bögen im Kreise abschneiden; und daher nach dieser Art auch den Kreis in gleiche Bögen theilen. Man nennt diese Theilung mecha-

nisch,

nisch, weil sie ihren Grund in richtig getheilten Instrumenten hat.

§. 132. Zusatz. Zieht man die Sennen gleicher Bögen in einem Kreise, so erhält man Figuren von mehr und mehr Seiten, je nachdem man den Kreis in viele Bögen getheilt hat, und die Seiten dieser Figuren sind gleich (127, II). Man heißt sie richtige Vielecke (Polygona regularia), wenn sie mehr, als vier Seiten haben, und zwar Fünf= Sechs= Achtecke, u. s. w.

§. 133. Lehrsatz. Ein Vieleck im Kreise, nach (132) entstanden, hat lauter gleiche Winkel.

Beweis. Ein solches Vieleck sey A B C D E fig. 46. Die Vieleckswinkel A, B, C, u. s. w. sind Kreiswinkel, und zwischen den Schenkeln eines jeden ist ein Bogen, welcher den ganzen Kreis, weniger zwei Theilbögen enthält; aber diese Theilbögen sind alle gleich wegen (§ 131), daher alle die Winkel (§ 125).

§. 134. Zusatz. Wenn der Kreis in n Bögen getheilt ist, so liegt zwischen den Schenkeln eines Vieleckes ein Bogen $= 360^\circ - \frac{2}{n} . 360^\circ$; die Hälfte dieses Bogens ist des Winkels Maaß (§. 123), also $= 180^\circ - \frac{1}{n} . 360^\circ$; woher es deutlich wird, die Grade für einen Winkel in solchem Vielecke, worinn n bekannt ist, zu finden.

§. 135. Erklärung. Figuren, deren Seiten und Winkel gleich sind, heißt man regulär (ordentlich). Dergleichen sind das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, und nun auch die im Zirkel beschrie-

schriebenen gleichseitigen Vielecke. Fehlt eine dieser Eigenschaften, so heißt das Vieleck irregulär (unordentlich).

Anmerk. Man braucht bei Dreiecken nur eine der genannten Eigenschaften zu wissen; und man beweist das Daseyn der andern (§ 65). Daß bei Vierecken die Sache anders sey, beweist das Quadrat und die Raute; dann das Quadrat und länglichte Rechteck. Bei andern Vielecken es zu untersuchen, wäre hier eine für die folgenden Sätze unnöthige Arbeit; sie würde auch nicht so kurz, wie die vorigen, ausgemacht seyn. Durch Zeichnung kann man sich versichern, daß bei Vielecken, die eine der genannten Eigenschaften haben, die andere nicht nothwendig dann auch in solchem Vielecke vorhanden seyn müße.

§. 136. Lehrsatz. In jedem, sowohl regulären, als irregulären Vielecke ist die Summe aller Winkel $= (n - 2) . 180°$; wenn n die Zahl der Seiten bedeutet.

Beweis. Ein solches Vieleck sey ABDCEFA fig. 47. Man nehme in seine Fläche einen Punkt N an, und ziehe aus diesem nach allen Winkelpunkten die Linien NA, NB u. s. w., so wird jede Grenzseite des Vielecks zwischen zwo solcher Linien liegen. Es giebt demnach so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat; denn offenbar giebt es mit AB, AN, BN ein Dreieck; weil der Punkt N außer AB liegt; und so folgt dieses für jede Seite. Aber auch jedes Dreieck hat nothwendig zween Winkel an einer Grenzseite, wovon jeder ein Theil des Vieleckswinkels ist, wie NAB, NBA; der dritte Winkel liegt am Punkte N.

Die

Die Winkel aller dieser Dreiecke machen zusammen $n \times 180^\circ$ (§ 104). Aber die Winkel um den Punkt N. gehören nicht zu den Winkeln des Vielecks: machen aber $2 \times 180^\circ$ (§ 49), und müßen, um die Winkel des Vielecks zu haben, von obiger Summe abgezogen werden; daher hat man für die Summe der Winkel im Vielecke $n. 180^\circ - 2. 180^\circ = (n-2). 180^\circ$.

§. 137. Zusatz. Weil die Winkel im regulären Vielecke einzeln gleich sind; so ist einer $= (n. 180^\circ - 2. 180) : n = 180^\circ - \frac{2}{n}. 180 = 180^\circ - \frac{1}{n}. 360^\circ$, welches mit (§ 133) übereinstimmt.

§. 138. Zusatz. Dreiecke im regulären Vielecke, die ihre Spitzen im Mittelpunkte haben, sind alle übereinstimmend (§ 66) und gleichschenklicht (§ 29), folglich theilt jede Linie FA, FB aus dem Mittelpunkte F fig. 46. in die Spitze des Vieleckswinkel, diesen in zween gleiche Theile.

§. 139. Lehrsatz. Um jedes reguläre Vieleck kann ein Kreis beschrieben werden, der durch alle Winkelsspitzen geht.

Beweis. Man halbire die Vieleckswinkel, wie A, B, C; fig. 46 durch AF, BF, CF, u. s. w; so werden AF, BF zusammen stoßen (§ 99), und bilden ein gleichschenklichtes Dreieck, worinn AF = BF ist (62). Aus den nämlichen Gründen wird CF mit BF zusammenstoßen; und so von allen Linien, die die Winkel halbiren. Aber dieses Zusammenstoßen geschieht auch in einem einzigen Punkte

F;

F; denn gesetzt C F treffe nicht in den Punkt F, so würde B F, die ihre Länge durch den Zusammenstoß mit A F erhielt, nun länger oder kürzer werden; aber Δ A F B ≅ Δ C F B (§ 61); also A F = C F = B F; dieses würde nicht seyn, wenn C F nicht in dem nämlichen Punkte F einträfe.

So wird aber der Beweis für alle andere Linien D F, E F, u. s. w. geführt; und es ist A F = B F = C F = D F u. s. w.; folglich liegt F gleichweit von den Winkelspunkten A, B, C, entfernt (§ 9), und aus F hat der Kreis statt (§. 29); wenn man A F oder C F oder D F u. s. w., als Halbmesser zu seiner Verzeichnung braucht.

§. 140. Zusatz. I. Aus F senkrechte Linien auf die Seiten des Vieleckes, dergleichen F g ist, halbiren die Seiten (§ 128, I), und sind alle gleich (§ 86, I); daher geht auch ein Kreis aus F, der alle Seiten in der Mitte berührt. Diesen heißt man den eingeschriebenen Kreis (circulus inscriptus), und den nach (§ 139) den umschriebenen (circulus circumscriptus).

II. Nimmt man ähnliche Stücke in den Grenzseiten z. B. Dritttheile, Viertheile, u. d. g., und zieht Linien aus F in solche ähnliche Abtheilpunkte, so werden diese Linien aus F gleich seyn (§ 66), und es ließ sich ein Kreis beschreiben, der durch alle solche ähnlich liegende Punkte der Grenzlinien geht.

III. Das alles heißt nun: Ein reguläres Vieleck hat einen Punkt in seiner Fläche, von welchem alle ähnlich liegende Punkte in seinem Umfange gleichweit abstehen; dieser Punkt kann des Vieleckes Mittelpunkt heißen.

§. 141.

§. 141. Aufgabe. Ein bestimmtes reguläres Vieleck zu beschreiben; wenn eine Seite gegeben ist.

Auflösung. 1) Es sey AB (fig. 46) die gegebene Seite; und wenn das Vieleck n Seiten, jede = AB, haben soll; so trage man an beide Ende der gegebenen Linie, d. i. an A und B den halben Vieleckswinkel (§ 51); so werden die Schenkel des so entstandenen gleichschenklichten Dreiecks im Mittelpunkte des Vielecks zusammen treffen.

2) Man beschreibe mit AF = BF den Kreis, und so kann AB nun n mal herum getragen werden.

Beweis. Das Verfahren giebt ein Dreieck, wie solches nach (§ 139) im Vielecke entsteht; und seine Schenkel sind die Halbmesser des umschriebenen Kreises; aber die Seiten des Vielecks sind die gleichen Sennen dieses Kreises, deren nicht mehr und nicht weniger als n seyn können, weil es genau n Dreiecke im Kreise giebt.

§. 142. Zusatz. Der Winkel im regulären Sechsecke ist $= 180^{\circ} - \frac{1}{6}.\ 360 = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$, also der halbe Winkel $= 60^{\circ}$; und daher jeder Winkel des Dreiecks im regulären Sechsecke $= 60^{\circ}$; folglich das Dreieck (§ 141) gleichseitig (§ 65); folglich ist der Halbmesser im umschriebenen Kreise gleich der Seite des Sechseckes.

§. 143. Zusatz. I. Wenn daher die Linien nach (§ 141) zum Sechsecke gegeben ist, so brauche man sie, als Halbmesser, zu dem daselbst zu beschreibenden Kreise.

II. Ist der Kreis gegeben, in welchem man das Sechseck beschreiben soll; so trage man den Halbmesser als Senne sechsmal hinein.

An-

Anmerk. Die in (§ 141) gegebene Auflösung wird meistens nach Winkelmessern verrichtet, und heißt daher (wie § 131 zu Ende) mechanisch. Nur einige Fälle sind in (131) angegeben, worinn die geometrische Theilung statt hat. Will man nach der mechanischen Methode verfahren, so muß man richtig getheilte Winkelmesser haben, und Genauigkeit beobachten. Es giebt Methoden, aus dem gegebenen Halbmesser die Seite des verlangten regulären Vielecks, und umgekehrt, aus der gegebenen Seite den Halbmesser zu finden: allein diese Lehren können hier noch keinen Platz haben.

§. 144. Lehrsatz. Wenn man auf jeden Schenkel eines Winkels eine senkrechte Linie errichtet; so schneiden sich diese zwo senkrechte Linien, und der Schnitt geschieht auf der Seite der Oefnung des Winkels.

Beweis. a) Es sey A fig. 48. ein rechter Winkel. Man errichte auf A C die p r senkrecht, so ist p r mit A B parallel (§ 97, I); q r auf A B senkrecht, schneidet p r (§ 99, IV); aber p r und q r liegen ganz innerhalb des Winkels, folglich auch der Punkt, wo sie sich schneiden.

b) Der Winkel B A C fig. 49 sey stumpf, p r, q r, wie oben senkrecht; so ist p r mit A B auseinander gehend (§ 99, II); aber p r; A B nach der andern Seite, d. i., nach der entgegengesetzten der Oefnung des Winkels verlängt, treffen in einem Punkte s (§ 99, I); und s ist ein spitzer Winkel (§ 108, I); folglich gehen q r, s r, oder p r zusammen (§ 99, I); aber von q r befindet sich auf der Seite, wo s von A liegt, kein Theil; also geschieht der Schnitt auf der Seite der Oefnung.

c)

c) B A C, fig. 50 sey spitz; so treffen p r; A B; zwischen A und B, etwa in s zusammen (§ 99, I), und A s p ist spitz (§ 108). Nun werde q in s; oder zwischen s und B; oder zwischen A und s, genommen, so ist im ersten Falle der Schnitt schon da; im zweiten und dritten Falle stehen s r, und q r auf A B so, daß sie wegen (§ 99, I) zusammen treffen müßen; dieses geschieht aber in einer Gegend, die zwischen A und B, also da liegt, wohin die Oefnung des Winkels gerichtet ist.

§. 145. **Aufgabe. Durch drei gegebene Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.**

Auflösung. 1) A, B, C; fig. 51. sind die drei gegebenen Punkte. Man ziehe die geraden Linien A B, und B D; und halbire diese durch die senkrechten p C, q C; so ist in C, wo diese p C, q C zusammen treffen, der Mittelpunkt des zu beschreibenden Kreises.

2) Aus C mit der Länge C A oder C B wird der Kreis beschrieben.

Beweis. Nach der Voraussetzung sollen die drei Punkte nicht in einer geraden Linien liegen. Wenn man daher ein Paar Punkte wie A, B mit einer geraden Linie A B verbindet, so liegt immer der dritte D außer dieser A B; und wenn nun noch B D, oder A D gezogen wird, so entsteht jedesmal ein Winkel A B D, oder D A B; daher, wenn B D und A D zugleich gezogen werden, ein Dreieck A B D (52). Die Linien p C; q C schneiden sich in C auf der Seite der Oefnung des Winkels B (144). Es sind aber A B, B D die Sennen des zu beschrei-

ben-

henden Kreises; also liegt der Mittelpunkt sowohl in pC, als qC (128, II), also im Schnitte C (7, VI), und folglich A, B, C, im Kreise; oder CA=CB=CD.

§. 146. Zusatz. Daß man eben sowohl AD und AB, oder AD und BD senkrecht hätte halbiren können, um den Mittelpunkt C zu finden, erhellet aus (144), weil man jedesmal einen Schnitt dieser senkrechten Linien erhält, welches eigentlich die Sache ist, worauf es ankömmt. Auch aus den dortigen Gründen ist klar, daß der Mittelpunkt jedesmal eine Lage haben werde, welche gegen der Oefnung eines jeden Winkels A, B, D, angetroffen wird.

§. 147. Das ΔABD, welches aus Verbindung der Punkte A, B, D, entsteht, ist entweder stumpf- oder recht- oder spitzwinklicht. Es sey B stumpf; also A und D spitz; in diesem Falle ist der Bogen AED größer als ein halber Kreis (124, III), und AD, dessen Senne, liegt mit B auf einer Seite des Mittelpunktes oder, welches eben das ist, C liegt nicht auf der Seite der AD, wo B liegt. Ist B ein rechter Winkel, so ist der Bogen BED ein halber Kreis (124, I) und AD der Durchmesser; also muß C in AD und zwar in deren Mitte seyn.

Sind alle drei Winkel spitz, so ist der Bogen AED kleiner als ein halber Kreis, und AD und der Punkt B liegen zu beiden Seiten des Mittelpunkts C.

§. 148. Zusatz. Die Schlüsse in 147 gründen sich darauf, daß ein Durchschnitt der, auf der Mitte zwoer Seiten eines Dreieckes errichteten senkrechten

Li-

Linien nothwendig erfolge; nur sie beweisen nicht, daß bei jedem Paare so getheilter Seiten des Dreieckes, immer der Schnitt im nämlichen einen Punkte erfolge.

Ich nehme zuerst an, daß nach (145) AB, BD durch pC, qC senkrecht halbirt, den Punkt C geben, und zwar in der Lage gegen AD, wie es die Figur zeigt, wo B stumpf seyn muß. Nun werde auch AD senkrecht halbirt, und es geschehe in r, so trift rC sowohl pC, als qC, jede der vorigen senkrechten Linien, wegen (144). Aber wegen (147) muß dieses auf der Seite der AD geschehen, wo C liegt; also muß r zwischen m und n liegen, in welchen AD von pC, qC geschnitten wird. Dieses letzte erläutert die Voraussetzung, daß B stumpf sey, und AD mit B auf einer Seite des Mittelpunkts liegen; und folglich pC; qC eher die AD treffen, als sie sich in C schneiden. Nun ist aber AD eine Senne in dem schon als möglich erwiesenen Kreise, also trift rC in C ein (128, II).

Würde AD die in (147) angegebene dritte Lage haben, so würden eben die Schlüsse statt haben; denn pC; qC würden, nachdem sie sich in C geschnitten haben, verlängt die AD treffen, und auch da müßte r zwischen den Punkten m, n, wie oben, liegen.

§. 149. Zusatz. Durch drei Punkte geht nur ein einziger Kreis, weil es nur einen einzigen Mittelpunkt giebt (148); daher fallen Kreise, die drei Punkte gemein haben, ganz zusammen. Aber in zweien Punkten können sie sich schneiden ohne zusammen zu fallen (30).

§. 150. Zusatz. Weil man in jedem Zirkelbogen drei Punkte, und also zwo Sennen anneh-

men kann, so läßt sich, wie in (145), der Mittelpunkt des Zirkelbogens finden.

§. 151. Zusatz. Durch die Winkelpunkte eines jeden ebenen Dreieckes hat ein Kreis statt; er ist wie ein umschriebener Kreis (140).

§. 152. Aufgabe. Einen Kreis in ein gegebenes Dreieck ABC, fig. 52 zu beschreiben, der die Seiten berührt.

Auflösung. Man halbire zween Winkel A, B durch AE und EB; aus E, ihrem Schnitte falle eine senkrechte ED, oder EG auf eine Seite des Δ, diese ist der Halbmesser zum verlangten Kreise.

Beweis. Zuerst ist klar, daß sich AE, EB schneiden (99, I); und beide Linien gehen in die Fläche des Dreieckes; denn sie liegen zwischen AC, AB; zwischen AB, BC; daher muß der Schnitt E erstlich über AB; zweitens linker Hand der BC, und drittens rechter Hand AC; also gewiß in der Fläche des Dreieckes geschehen, und folglich sind die angegebenen senkrechten Linien möglich.

Nun haben die ΔΔ AEG; AED bei A wegen der Verzeichnung gleiche Winkel; bei D und G rechte Winkel; und folglich ∢ AEG = ∢ AED (106); daher Δ AEG ≅ Δ AED (§ 61); und EG = ED. Auf eben die Art wird erwiesen, daß Δ BED ≅ BEF; und ED = EF. Daher sind EG = ED = EF, Halbmesser zu einem Kreise; da aber auch die gedachten senkrechten Linien die kürzesten auf die Seiten des Dreieckes sind; so liegen alle andere Punkte dieser Seiten außer dem Kreise (§ 30, II); oder der Kreis wird nur in G, F, D, von den Seiten des Dreieckes berührt.

§. 153.

§. 153. Erklärung. Eine gerade Linie AB, fig. 51, die nur einen Punkt D mit dem Kreise gemein hat, sonst ganz außer dem Kreise liegt, heißt Tangente (Berührungslinie).

§. 154. Aufgabe. An einem gegebenen Punkt D fig. 53. am Kreise, eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man lege einen Halbmesser CD an den gegebenen Punkt; in D errichte man die senkrechte DA, die man auch nach der andern Seite B verlängen kann; diese gerade ADB ist die verlangte Tangente.

Beweis. Weil CD senkrecht auf AB ist, so sind Linien aus dem Mittelpunkte, an jeden andern Punkt der AB, länger, als CD (§ 82); daher liegen außer D alle andere Punkte der AB außerhalb des Kreises (§ 30).

§. 155. Zusatz. In D ist nur eine einzige Tangente möglich; weil es in D nur eine senkrechte Linie giebt, die in der nämlichen Ebene des Kreises liegt, d.i., mit CD in eine Ebene fällt (§ 79).

§. 156. Zus. I. Jede Tangente steht am Ende des Halbmessers senkr. Denn der Halbmesser ist die kürzeste Linie, die aus dem Mittelpunkte an die Tangente gezogen werden kann (§ 82).

II. Am Berührungspunkte eine senkrechte Linie gezogen, geht in den Mittelpunkt; denn gieng sie nicht durch den Mittelpunkt, so gäbe es aus dem Mittelpunkte auf die Tangente noch eine andere senkrechte; diese müßte aber auch CD seyn; aber zwei giebt es nicht (179).

III. Jeder andere Punkt des Bogens, der nicht der Berühtungspunkt ist, liegt näher am Mit-

telpunkte, als die Tangente; weil alle andere Linien an die Tangente länger, als CD sind (83), d. h.: Die Tangente hat den Kreis ganz auf einer Seite, und zwar nach der Gegend des Mittelpunkts.

IV. Und je weiter des Bogens Punkte vom Berührungspunkte abliegen, desto weiter sind sie von der Tangente entfernt; weil CA > CE (§ 82, II). Zieht man von CA; CE, die gleichen Ce; Ca, ab, so ist Aa > Ee.

V. Aber der Bogen Da liegt zwischen der Tangente und seiner Senne Da; weil er weiter als die Senne, und näher als die Tangente am Mittelpunkte liegt.

§. 157. Aufgabe. Aus einem gegebenen Punkte A, fig. 54 außerhalb eines Kreises BED eine Tangente an diesen Kreis zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von A, in den Mittelpunkt des Kreises, AC; und beschreibe einen Kreis BAD, dessen Durchmesser = AC, sey, welcher den gegebenen in B und D schneidet (38, 149). Man ziehe BA und DA; beide sind Tangenten aus A.

Beweis. Man ziehe CD, CB; so ist CBA sowohl, als CDA, ein rechter Winkel (124); daher DA und BA Tangenten (145, I).

§. 158. Weil nur zwei Schnitte in B und D geschehen (§ 149), so giebt es auch nur zwo; aber allemal zwo Tangenten aus einem Punkte außerhalb eines Kreises.

§. 159. Lehrsatz. Der Winkel ATF, fig. 55, den eine Senne TF mit der Tangente AT macht, hat den halben Bogen TEF, der zwischen Senne und Winkel liegt, zu seinem Maaße.

Bew.

Beweis. Man ziehe TC; ferner CE senkrecht auf TF; so ist der Bogen ET = ½ Bogen TEF (128, I), und ∢ ATF + ∢ FTC = 90° (143) = ∢ FTC + TCE (108, I); oder ∢ ATF = ∢ TCE; aber der letzte wird vom Bogen ET gemessen (42).

Wollte man ∢ FTB verstehen; so ist auch dieser = FTC + CTB = ChT + FTC = TCG (105); wo der letzte vom Bogen TG = ½ Bogen TGF gemessen wird.

Von der Gleichheit der Flächen.

§. 160. Lehrsatz. Parallelogramme von einer Grundlinie AB fig. 56, und zwischen den nämlichen Parallellinien AB; CF, wovon eine durch die Grundlinie geht, sind von gleichem Inhalte.

Beweis. Δ ACE ≅ Δ BDF wegen (§66); denn AC = BD; AE = BF (118); ferner ist CF eine gerade Linie, und CD + DE = CE = DE + EF = DF. Man ziehe Δ DGE von den eben genannten beiden Dreiecken ab, so ist CDGA = FEGB; und zu diesen beiden Trapezien das Δ AGB addirt, giebt ACDB = AEFB.

Fiele der Punkt E zwischen C und D fig. 56*, so ist der Satz noch wahr; denn AB = CD = EF, und ED von beiden letzten weggenom̃en, giebt CE = DF; ferner ist AC = DB; und AE = BF (118); daher Δ CEA ≅ DBF; und wenn man zu beiden das Trapez AEDB addirt, kömmt ACDB = AEFB.

Fiele E genau in D, wie fig. 56**, so hat man sogleich Δ ADC ≅ BDF; und zu beiden das

Δ ADB addirt, giebt die Parallelogramme ACDB = ADFB.

§. 161. Zusatz. Dreiecke, die einerlei Grundlinie, und die gegenüber liegende Spitze in einer mit der Grundlinie Parallelen haben, sind daher gleich, weil sie Hälften solcher Parallelogrammen von der genannten Eigenschaft sind. Denn fig. 57 sey AB die gemeinschaftliche Grundlinie der ΔΔ ABC, ABD, und CD parallel mit AB. Man ziehe EB parallel mit AC, dann AF parallel mit BD, so sind ACEB, AFDB Parallelogramme (114, I) und gleich (160); aber Δ CEB = Δ ACB = $\frac{1}{2}$ ACEB, und Δ AFD = Δ ABD = $\frac{1}{2}$ AFDB (119), folglich Δ ACB = Δ ABD, welche die genannte Eigenschaft haben.

§. 162. Zusatz. I. Wegen (94, I) läßt sich die Bedingung in (160) so ausdrucken: Parallelogramme von einer Grundlinie und gleichen senkrechten Linien zwischen der Grundlinie und gegenüber liegenden Parallele, sind gleich; und in (161) kann man sagen: Dreiecke von einerlei Grundlinien und gleichen senkrechten Linien von der Spitze auf diese Grundlinie sind gleich; denn sie lassen sich bei diesen Eigenschaften zwischen die nämlichen Parallellinien bringen.

Die eben genannte senkrechte Linie heißt die Höhe der Parallelogramme. Die Allgemeinheit des Satzes zeigt, daß es willkürlich sey, welche Linie man bei Parallelogrammen und Dreiecken zur Grundlinie annehmen wolle; allein bei bestimmter Grundlinie ist die Höhe nicht mehr willkürlich. So wä=

wäre, wenn AB die Grundlinie beider Dreiecke ist, Dp ihre gemeinschaftliche Höhe.

II. Quadrate können nur gleich seyn, wenn sie gleiche Seiten haben.

§. 163. Zusatz. Auch die Gestalt der Parallelogramme und Dreiecke kam in den obigen Sätzen nicht in Betracht; daher kann das eine recht- und das andere schiefwinklicht seyn.

§. 164. Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm ABCD, fig. 58 in ein anderes EGHF, worinn ein gegebener Winkel x seyn soll, zu verwandeln.

Auflösung. Man nehme eine Linie EF = AB; und lege eine Linie EG unter dem gegebenen Winkel x daran; ziehe GH parallel EF in der Weite (Höhe), welche AB und die gegenüberstehende CD von einander haben; ferner FA parallel EH; so ist EGHF das verlangte Parallelogramm,

Beweis. EGHF ist ein Parallelogramm (114) und ACDB = EGHF wegen (162).

§. 165. Zusatz. Wenn ein Dreieck, wozu ein Winkel gegeben ist, so groß verzeichnet werden soll, als ein anderes, welches aber andere Winkel hat, so wird das obige Verfahren so angebracht, daß beide Dreiecke auf einer geraden Linie ihre gleichen Grundlinien haben, ihre Spitzen aber in einer mit dieser geraden Linie parallelen Linie sind.

§. 166. Zusatz. Da die senkrechten Linien zwischen Parallelen die möglichst kürzesten sind, so sind die Grenzlinien vom rechtwinklichten Parallelogramm zusammen allemal kürzer, als die vom

schiefwinklichten; wenn sonst beide zwischen einerlei Parallelinien und auf gleichen Grundlinien stehen, und daher gleichen Inhalt haben. Diese Bemerkung wird in (§ 214) noch näher bestimmt.

§. 167. Zusatz. I. Ein Dreieck ABC fig. 59 ist einem Parallelogramm gleich, wenn des Dreieckes Grundlinie $AB = 2.\ AD = AD + DB$, und beide die nämliche Höhe Ea haben. Denn weil $AD = DB$, so ist $\Delta\ DCB = \Delta\ ACD$ (162); aber $\Delta\ ACD = AEC$ (119); daher diese 4 Dreiecke gleich; folglich $\Delta\ AEC + \Delta\ ACD = \Delta\ ACD + \Delta\ DCB$; d. i.: das Parallelogramm $AEDC = \Delta\ ACB$, worinn die genannte Beschaffenheit ist.

II. Umgekehrt haben Dreieck und Parallelogramm einerlei Höhe und Grundlinie; so ist ersteres die Hälfte von letzterm.

§. 168. Zusatz. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln, nimmt man die halbe Grundlinie des Dreieckes zur Grundlinie des Parallelogramms, und giebt diesem die Höhe des Dreiecks. Der Umgekehrte Fall begreift sich aus 167.

§. 169. Lehrsatz. Wenn man in einem Parallelogramm ABCD fig. 60 eine Diagonallinie DB zieht; dann durch die Fläche des Parallelogramms die Parallelen FH, GI, die mit der Diagonale in einem Punkte E zusammen treffen; so erhält man vier Parallelogramme GDHE; EIBF; AGEF; EHCI; wovon die beiden letzten, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich sind.

Beweis. Wegen (§ 119) ist $\Delta\ DCB \cong \Delta\ DAB$; eben so $\Delta\ DHE \cong \Delta\ DGE$; und $\Delta\ EIB \cong \Delta\ EFB$; folglich auch $\Delta\ DHE + \Delta\ EIB =$

Δ

Δ DGE + Δ EFB; daher Δ DCB — (Δ DHE + Δ EIB) = Δ DAB — (Δ DGE + Δ EFB); aber diese Reste geben die Parallelogramme HEIC = AGEF.

§. 170. Aufgabe. Ein Parallelogramm so groß zu machen, als ein anderes ist, wenn ein Winkel und Seite gegeben ist, die im erstern seyn sollen.

Auflösung. Es sey in der 61 fig. w der gegebene Winkel, und v w die gegebene Seite; AB CD das gegebene Parallelogramm. Man mache AEFB = ABCD, worinn ∢ EAB = w ist, nach (164) und verlänge AE bis H, daß EH = vw werde; und BF in G verlängt, daß auch FG = EH sey; und ziehe GH; so ist HGFE ein Parallelogramm (117); zieht man hier die Diag. GE, und verlängt solche gegen AB, so trift sie die AB in K; oder AB verlängt bis in K (99, IV). Durch K ziehe man KI parallel mit AH und GH verlängt; trift solche in I, so ist EHIL das verlangte Parallelogramm (114), worinn EH die gegebene Seite, und ∢ ILE der gegebene Winkel ist.

Beweis. ∢ ILE = ∢ HEF = w (102, II); aber EHIL = AEFB (169) = ABCD.

§. 171. Zusatz. Wäre ein Dreieck gegeben, und man sollte ein Parallelogramm zeichnen, welches diesem Dreiecke gleich wäre, aber eine gegebene Seite und Winkel hätte, so wird erst ein Parallelogramm dem gegebenen Dreiecke gleich, und worinn der gegebene Winkel ist, gezeichnet, welches nach (168 verbunden mit 165) möglich ist; und, wenn nach oben AEFB dieses Parallelogramm,

 wä-

wäre, das dem Dreiecke gleich ist; so wird man nach eben der Art das verlangte Parallelogramm ILEH erhalten.

§. 172. Aufgabe. Ein jedes parallele Trapez ABCD fig. 62 in ein Dreieck zu verwandeln, das diesem Trapez gleich ist.

Auflösung. Man verlänge eine parallele Seite AB bis in E, daß BE = CD sey, und ziehe CE; so ist △ ACE = ABCD.

Beweis. Die Diagonale CB theilt das Trapez in zwei Dreiecke, und so ist △ ACB + △ CBD = ABCD; aber △ CBE = △ CBD (161); folglich auch △ ACB + △ CBD = ABCD = △ ACE. Der Satz heißt: ein paralleles Trapez ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie so groß, als die parallelen Seiten, und die Höhe der Abstand dieser Seiten ist.

§. 173. Zusatz Ein jedes andere Trapez abcd fig. 63 kann durch Zeichnung in ein Dreieck, das dem Trapez gleich ist, verwandelt werden. Man ziehe die Diagonale bd, und mit ihr durch c die Parallele ce, welche die verlängte ad in e trift; und ziehe be, so ist △ abe = abcd; denn abcd = △ abd + △ bcd; aber △ bcd = △ dbe; weil sie die Grundlinie bd gemeinschaftlich, und ihre Spitzen in der Parallele ce haben; daher ist abcd = △ abd + △ dbe = △ abe. Man hätte auch ab verlängen können, bis sie auf der andern Seite des Punktes c mit ce zusammen gestoßen wären, und aus d bis in den Punkt des Zusammenstoßes eine Linie gezogen, würde ein Dreieck gebildet haben, das auch der Größe des Trapez

gleich

gleich gewesen wäre. Ein allgemeines Gesetz aber, wie groß die Grundlinie eines solchen Dreieckes, das dem Trapez gleich ist, seyn müße, läßt sich im Voraus nicht, wie bei den obigen Verwandlungen (172, 168) geben.

II. Durch Zeichnung läßt sich eine jede vielseitige unordentliche Figur in ein Dreieck verwandeln; wenn man nämlich zuerst eine Diagonale zieht, wodurch in der Figur ein Dreieck abgeschnitten wird, und mit dieser Diagonale durch die, ihr gegenüber liegende Spitze des so entstandenen Dreieckes eine Parallellinie, wie oben c e legt, und eine Seite der Figur, welche in die Diagonale einschneidet, so viel verlängt, bis sie mit der Parallellinie zusammen trift; dieses Verfahren aber wiederholt. Man erhält bei jeder einzelnen solchen Arbeit eine gleiche Figur, welche eine Seite weniger, als die vorige hat; und bringt sie endlich in ein, ihr gleiches Dreieck.

§. 174. Aufgabe. Eine Figur zu verzeichnen, die einer gegebenen gleich und ähnlich ist.

Auflösung. I. Wenn alle Seiten der Figur und die Diagonallinien, welche dieselbe in Dreiecke theilen, gegeben sind. Als Exempel kann die 84te Figur dienen.

Man zeichne ein Dreieck nach dem andern, völlig nach (§ 57, I), und lege sie so an einander, wie sie in der gegebenen Figur liegen; d. i., man gebe den an einander liegenden Dreiecken in der Verzeichnung die Diagonallinie gemeinschaftlich, wie sie solche in der gegebenen Figur gemeinschaftlich haben.

II. Wenn alle Wenkel, weniger drei, und alle Seiten gegeben sind. Man verzeichne die Winkel nach (51) oder (daselbst Anmerk.), trage aber in die Schenkel eines jeden die gehörige Länge.

Hätte man so das Verfahren von ∢F, und den zugehörigen Längen FA, FE in der 84ten Figur angefangen, und man wäre bis dahin gekommen, daß AB und ED ihre Lage und Länge hätten; d. i., daß die Punkte B, und D ihren richtigen Ort einnehmen; so kann man das Dreieck DBC, worinn die Linie DB der Lage und Länge nach gegeben ist, nach I noch verzeichnen.

III. Wenn alle Winkel, weniger zwei, angegeben sind, und man verzeichnet sie nach II, so braucht eine Seite nicht gegeben zu seyn; denn man würde in dem Verfahren II die Lage der Punkte C, D erhalten; und nach (7, IV) die Linie CD ziehen können.

Beweis. In I erhält man eine Figur, deren Theile (Dreiecke) einzeln; und auch noch in Verbindung, mit denen in der gegebenen Figur übereinstimmend sind; also decken die Figuren sich wechselweise.

In II und III erhält man Figuren, deren Grenzlinien der Lage und Länge nach einerlei sind; daher fallen solche Figuren in all ihren Grenzpunkten zusammen (§20).

Anmerk. Es giebt noch mehr Methoden, diese Aufgaben aufzulösen, die man in unterschiedenen Anleitungen zum praktischen Feldmessen findet; die oben angeführten scheinen mir hinlänglich, um sowohl die Möglichkeit der Aufgabe zu zeigen, als auch für die Praktik. Anfängern, die sich zum

Feld-

Feldmessen vorbereiten wollen, ist zu rathen, sich in solchen Verzeichnungen zu üben. Uiberhaupt aber gewähret ein genaues Aufzeichnen der Figuren beim Erlernen der Geometrie den Nutzen, daß man vollständigere Einsicht in den Vortrag, und ein bleibenderes Erinnern an das Gelernte, erhalte.

§. 175. **Lehrsatz. In einem rechtwinklichten** Dreiecke ABC fig. 64 ist das Quadrat der Hypothenuse so groß, als die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen, oder □ CHIB = □ ABDE + □ ACGF.

Beweis. Man ziehe durch A die AK parallel mit BI; dieses ist allemal möglich; weil ∢ ABI = ∢ ABC + ∢ CBI, d. i., aus einem spitzen (108) und rechten Winkel zusammen gesetzt, ein stumpfer Winkel ist, und so AB, gegen BI geneigt ist, folglich A oberhalb BI liegt. Diese AK schneidet nothwendig bei L die Hypothenuse, und LK theilet das □ CHIB in zwei Rechtecke LKIB, und LCHK; das erste ist dem Quadrate ABDE, an das es in B anstößt, gleich, das zweite ist dem □ ACGF, an das es in C anstößt, gleich. Dieses wird nun so erwiesen:

Man ziehe CD; AI; so ist △ DCB ≅ △ AIB; weil DB = AB; CB = BI; und ∢ CBA + ∢ ABD = ∢ CBA + ∢ CBI, d. i. ∢ CBD = ∢ ABI; aber △ DCB hat mit dem □ ABDE die nämliche Grundlinie BD, und stehen beide zwischen den nämlichen Parallelen EC und DB, daher △ DCB = $\frac{1}{2}$ □ ABDE (167, II).

Aus

Aus eben den Gründen ist $\triangle$ AIB $= \frac{1}{2}$ Rechtecke BLKI; folglich $\frac{1}{2}$ □ ABDE $= \frac{1}{2}$ Rechtecke BLKI, und so sind auch diese Parallelogramme ganz genommen, gleich.

Man ziehe GB; AH, so entsteht $\triangle$ GBC $\cong \triangle$ AHC; denn nach eben der Art, wie oben ist $\sphericalangle$ GCB $= \sphericalangle$ ACH; und GC $=$ AC; CB $=$ CH; aber $\triangle$ GBC $= \frac{1}{2}$ □ GFAC; wegen der nämlichen Grundlinie GC und einerlei Höhe FG; eben so ist $\triangle$ AHC $= \frac{1}{2}$ Rechtecke LCHK, wegen einerlei Grundlinie CH und Höhe HK $=$ CL; und daher, wie oben zu schließen, □ GFAC $=$ Rechtecke LCHK und so □ ABDE $+$ □ GFAC $=$ LBIK $+$ LCHK $=$ □ BCHI (Rechenk. 337, a).

Anmerk. Pythagoras ist der Erfinder dieses Satzes; daher er auch der Pythagorische Lehrsatz heißt. Die Anwendung davon kömt oft in allen Theilen der Mathematik vor; und man wäre ohne diese Kenntniß vom Verhalten der drei Seiten des rechtw. Dreieckes nicht im Stande, von wichtigen Sätzen und Erfindungen die Beweise zu geben; vermuthlich auch würde ohne sie manche Erfindung nicht gemacht worden seyn.

§. 176. Zus. Wenn die Hypothenuse h heißt, der eine Kathet a, der andere b, so hat man $h^2 = a^2 + b^2$; folglich $h^2 - a^2 = b^2$ und $h^2 - b^2 = a^2$; daher $h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$, und $b = \sqrt{(h^2 - a^2)}$; $a = \sqrt{(h^2 - b^2)}$; woraus erhellet, wie man aus jeden zwo Seiten eines rechtwinklichten Dreieckes die dritte durch Rechnung finden könne.

Anmerk. Der nächste Zusatz zeigt, wie man die Linien durch Rechnung finden könne, und setzt zum voraus, daß die Linien durch Zahlen, deren Einheit

heit ein Maaßtheil, eine gewisse Linie sey, angegeben sind; und dieses wird aus (26) begreiflich. Daß man aber mit Rechte die Bezeichnung der Quadrate der Linien, wie die Quadrate der Zahlen (139 Rechenk.) machen könne, wird erst weiter unten noch näher gezeigt werden.

§. 177. Aufgaben. Ein Quadrat zu machen I, das so groß ist, als zwei, drei, oder mehrere gegebene Quadrate.

II. Ein Quadrat zu machen, welches zwei= drei= oder so vielmal größer, als ein gegebenes ist, wie vielmal man es verlangt.

III. Ein Quadrat zu machen, welches der Unterschied zweier Quadrate ist.

IV. Ein Quadrat zu machen, welches so groß ist, als ein bestimmter Theil eines gegebenen.

Auflösung. I. Die Auflösungen gehen dahin, jedesmal nur die Linie zum verlangten Quadrate zu finden, welches dann nach (121) verzeichnet werden kann.

Man setze die Seiten zweier Quadrate rechtwinklicht zusammen, und ziehe die Hypothenuse; diese ist die Seite zu einem Quadrate, welches so groß wird, als beide. In der 65 Figur sind A B, B C, die zwo Seiten von zweien Quadraten, und A C die Hypothenuse. Nun setze man die Seite D C vom dritten Quadrate senkrecht auf AC, und ziehe A D, so ist das Quadrat von A D so groß, als die drei gegebenen, deren Seiten AB, BC, C D sind. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, wenn man des vierten Quadrates Seite auf AD senkrecht setzt, und so immer wiederholt, wie man es bei A C und CD machte.

II.

II. Die Diagonale eines Quadrates ist die Linie zu einem Quadrate, welches zweimal so groß ist, als das gegebene. Setzt man, wie in I, auf diese Diagonale abermal die Seite des Quadrates senkrecht, und nimmt dann die Hypothenuse, so ist diese die Linie zum dreifachen Quadrate; und so kann man auch diese Arbeit fortsetzen.

III. Man mache einen rechten Winkel A fig. 66, und trage in dessen einen Schenkel die Seite des kleinen Quadrates = a; mit der Länge der Seite b des andern Quadrates beschreibe man aus B einen Bogen, der bei C in dem Schenkel des Winkels A einschneiden wird, und so ist AC = d die Seite zum verlangten Quadrate.

IV. a) Das Quadrat soll die Hälfte eines gegebenen seyn. Man halbire in der 67 fig. zwo an einander stehende Seiten AB, AD in m, n, so ist mn die Linie zum verlangten Quadrate.

b) Soll das verlangte $\frac{1}{4}$ eines gegebenen seyn, so mache man aus der halben Seite des gegebenen Quadrates, eines, dieses ist $\frac{1}{4}$ des gegebenen. Will man Quadrate haben, die Theile eines gegebenen sind, deren Nenner nach Potenzen der 2 fortgehen; oder die $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$, u. s. w. eines gegeben sind; so kann man allgemein so wie in (a) verfahren, und jedes folgende Quadrat wird die Hälfte des vorhergehenden seyn.

c) Setzt man An auf mn senkrecht; und zieht die Hypothenuse C völlig nach I); so erhält man die Linie zu einem Quadrate, welches $\frac{3}{4}$ des gegebenen ist. Verbindet man dieses Verfahren mit (IV, b), so erhält man Linien zu verschiedenen Quadraten,

die

die Theile des gegebenen, aber von Nennern seyn werden, welche wieder Potenzen der 2 sind. Aber die Zähler werden die ungeraden Zahlen seyn.

d) Man nehme $\frac{1}{3}$ AB = a; dann $\frac{2}{3}$ AB = b der 67 fig. und verfahre nach III, um AC = d in der 66 fig. zu haben, so ist d die Seite vom Quadrate, welches $\frac{1}{3}$ des gegebenen ist. Macht man ein rechtwinklichtes △, dessen jeder Kathet = d, so ist die Hypothenuse die Seite zu einem Quadrate, welches $\frac{2}{3}$ des gegebenen ist nach II.

e) Man nehme Am = $\frac{1}{5}$ AB, aber An = $\frac{2}{5}$ Ad, so ist mn die Seite zum Quadrate, welches $\frac{1}{5}$ ABCD ist. Auch dieses Verfahren läßt sich nach II für $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$; und nach I für $\frac{3}{5}$ des Quadrates fortsetzen.

Anmerk. Eine allgemeine Regel, woraus die Arbeit, ein Quadrat zu machen, das ein jeder beliebiger Theil eines gegebenen ist, sogleich angegeben würde, läßt sich nicht wohl, am wenigsten in diesen Anfangsgründen geben. Die einzelnen Fälle, und der nun folgende Beweis zeigen jedoch, daß man mit kleiner Uiberlegung, jeden verlangten Theil eines Quadrates, in einem Quadrate darstellen könne. Da bißher noch keine geometrische Methode gegeben ist, die aber unten folgen wird, eine gegebene Linie in jede verlangte Theile zu theilen, so muß für die ungeraden Theilungen in (IV. c, d, e,) die Möglichkeit, daß die Linie des Quadrates gemessen sey, einsweilen hergenommen werden.

Beweis. Die Auflösung in I und II gründet sich auf (175); und weil in II, nach (176) hier a = b, so ist $h^2 = 2a^2$. In III ist nach der Vorschrift zur Auflösung $b^2 - a^2 = d^2$ (176).

In (IV a) ist, wenn die Seite des gegebenen Quadrates $= 1$ ist, $Am = An = \frac{1}{2}$; und $Am^2 + An^2 = mn^2$; d. i. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

In (IV b) ist das wiederholte Verfahren des, daselbst bei (a). Das Verfahren (c) gründet sich auf II; und weil $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, so ist die Hypothenuse, die zu den Seiten der beiden Quadrate $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ gehört, die Seite zu einem Quadrate; welches $= \frac{3}{4}$ des gegebenen ist. Aber $\frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; oder $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$; daher die Hypothenuse, die zu den Seiten der Quadrate $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$ gehört, giebt die Seite zum Quadrate $= \frac{5}{8}$.

In (d) ist nämlich $b^2 - a^2 = d^2$, d. i. $(\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

In (e) ist $a = \frac{1}{5}$; $b = \frac{2}{5}$, daher $(\frac{1}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Um ein Quadrat $= \frac{1}{6}$ eines gegebenen zu machen, nehme man $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$ der Seite des Quadrates, welche nach (d) aus dem Drittheile der Linie zu nehmen sind; und da ist $(\frac{5}{12})^2 - (\frac{1}{12})^2 = \frac{24}{144} = \frac{1}{6}$.

Mehrere Auflösungen, verlangte Theile eines Quadrates in Quadraten zu geben, lehrt die Algebra.

§. 178. Lehrsatz. I. Gleiche Sennen im nämlichen Kreise sind gleichweit vom Mittelpunkte entfernt.

II. Geleichweit entfernte sind gleich.

III. Die Senne, die entfernter vom Mittelpunkte liegt, als eine andere, ist kleiner, als diese andere.

IV. Die kleinere liegt entfernter.

Bew.

Beweis. I. Es sey in der 68ten Figur DE = AB. Man lasse aus dem Mittelpunkte C, CF, CG, senkrecht auf diese Sennen fallen; so messen die CF, CG den Abstand der beiden Sennen vom Mittelpunkte (86), theilen aber auch die Sennen in zween gleiche Theile (128); oder AF = BF; und GD = GE, aber wegen der Annahme in (I) ist auch FB = GE. Man ziehe die Halbmesser CE, CB. Nun ist $CE^2 - EG^2 = CG^2$, auch $CB^2 - FB^2 = CF^2$; aber wegen $CE^2 - EG^2 = CB^2 - FB^2$ ist $CF^2 = CG^2$ (176); oder CF = CG (162, II).

II. CG = CF; daher ist nun aus eben den Gründen $CB^2 - CF^2 = FB^2 = CE^2 - CG^2 = EG^2$; oder FB = GE, d. i. weil der Beweis giebt, daß die halben Sennen gleich sind, so sind auch die ganzen Sennen gleich.

III. Wenn DE entfernter liegt, als AB, so ist CG > CF, also auch $CG^2 > CF^2$; aber $CB^2 - CF^2 = FB^2$; und $CE^2 - CG^2 = GE^2$ (176), folglich, weil $CB^2 = CE^2$, ist $GE^2 < FB^2$ (Rechenk. 337, IV.), also auch GE < FB; und so auch DE < AB.

IV. AB > DE, und wie oben CG, CF gezogen, giebt FB > GE. Nun ist $CB^2 - FB^2 = CF^2$; und $CE^2 - GE^2 = CG^2$; folglich nach oben angeführten Gründen $CF^2 < CG^2$, oder CF < CG.

§. 179. Zusatz. I. Daher ist der Durchmesser die größte ganze, und der Halbmesser die größte halbe Senne in einem Kreise; weil bei ihnen CG = 0 wird; und eine Senne, die kleiner wird, als

jede angebliche Linie, die liegt um den Halbmesser vom Mittelpunkte entfernt; weil auch sie, und ihre Hälfte = o können angenommen werden.

II. Die Aenderungen von Größe der Senne, und ihre Entfernung vom Mittelpunkte sind immer mit einander vorhanden; und wenn das eine größer wird, so wird das andere kleiner; obschon nicht im einfachen Verhältnisse.

§. 180. Zusatz. Eine kleinere Senne DE macht mit dem Halbmesser CE einen größern Winkel, als die größere AB mit dem Halbmesser CB. Denn die beiden spitzen Winkel machen = 90° (108, II); aber der halbe Mittelpunktswinkel FCB > GCE, weil der Bogen BA, als Mas des erstern größer ist, als der Bogen GE, der das Mas des letztern ist; und folglich CBF < CEG.

§. 181. Lehrsatz. I. Die senkrechte Linie ab oder $\alpha\beta$ fig. 69 von der Mitte der Senne an ihren Bogen (Höhe des Bogens) ist die größte unter allen, die auf der Senne senkrecht an den Bogen gezogen werden. II. Die senkrechten Linien auf der Senne an den Bogen werden kleiner, je weiter sie von dieser ab oder $\alpha\beta$ entfernt liegen.

Beweis. I. Man ziehe den Durchmesser KL parallel mit AB, und verlänge ba bis in β; fe bis φ und gh bis γ; so ist cn = ae (§ 114) der Abstand vom Mittelpunkte für die Senne $f\varphi$, cm = ah für $g\gamma$. Nun ist $b\beta$ die größte Senne (179); aber $f\varphi > g\gamma$; auch Cb > nf > mg (178); zieht man Ca = ne = mh, von ihren genannten halben Sennen ab, so ist ab das größte Stück. Setzte man zu den halben Sennen Cβ, nφ;

$n\varphi$; $m\gamma$, die gleichen Ca, ne, mh, so ist eben so $\alpha\beta$ die größte senkrechte Linie auf der Senne an den Bogen.

II. Weil $nf > mg$, so ist wegen (I) $ef > hg$; eben so $e\varphi > h\gamma$; aber hg liegt weiter von ab, als ef; eben so von $h\gamma$ und $e\varphi$ verstanden.

§. 182. Zusatz. I. Wenn man auf der andern Seite von $b\beta$, nämlich gegen L, Sennen, wie $f\varphi$; $g\gamma$ in eben dem Abstande, wie jene auf der vorigen Seite, legt, so ist offenbar, daß ihre senkrechten Stücke zwischen Senne und Bogen denen gleich seyn werden, die auf der Seite gegen K gleiche Entfernung mit ihnen hatten (178, II).

II. Rückt die Senne AB parallel vom Mittelpunkte gegen b, so werden solche Stücke wie hg, ef nach und nach $=0$, wenn nämlich die halbe Senne nach und nach $=$ ah, oder $=$ ae wird, wo h und e in den Kreis kommen; das geschieht aber immer mit einem Paar Stücke, davon jedes auf einer Seite des Punktes a liegt, zugleich (I). Das letzte Stück, welches verschwinden kann, ist ab, und man muß sagen, ehe dieses geschieht, verschwanden zu beiden Seiten dieser ab das zunächst liegende (unendlich nahe) Paar. Aber die Senne selbst muß auch immer kleiner werden (178, III) und verschwindet, wenn sie in b kömmt, und da giengen die an a zunächst liegenden Punkte zusammen in einen, also kann ein Punkt im Kreise für zween an einer verschwundenen Senne angesehen werden; da aber nun noch Cb auf diesem Punkte b senkrecht ist, so ist der Halbmesser immer auf den Kreis senkrecht.

III. Behält die Senne bei diesem Wegrücken immer die nämliche Länge, so folgt, daß in jeder

nächst folgenden Lage zween andere Punkte der Senne den Kreis schneiden, die zu beiden Seiten des Punktes a liegen, weil in jeder folgenden Lage ein kleineres Stück der Senne in dem Kreise seyn kann. Nach dem letzten Paar solcher Punkte kömmt a in den Kreis, und AB wird zur Tangente. Man ist also auch hier berechtigt zu sagen: Der Berührungspunkt der Tangente gilt für zween Punkte; daher ist auch noch wahr, daß eine senkrechte Linie auf den Berührungspunkt der Tangente gezogen, durch den Mittelpunkt gehe; weil die Sache so betrachtet, mit (128, II) übereinstimmt; wie dieses auch in (156) aus andern Gründen erwiesen ist.

§. 183. Lehrs. Wennman aus einem Punkte A (70 fig.) der außerhalb des Kreises liegt, Linien an den, gegen den Punkt A hohlen Theil des Kreises FBf zieht, so ist I die Linie AB, welche durch den Mittelpunkt geht, die größte unter allen; und II die, welche weiter, als eine andere von AB liegt, ist immer kleiner als diese andere. III. Betrachtet man die Linien, wie sie an den erhabenen Theil Fhf aus A gezogen sind, so findet das Gegentheil von I und II statt.

Beweis. I. Man lasse aus C auf AD die senkrechte Linie CP, so ist $AC > AP$; auch $CB > PD$ (179); also um so mehr $AC + CB > AP + PD$; oder $AB > AD$.

II AE liege weiter, als AD von AB; also AD zwischen AE und AB; daher $\angle EAB > \angle DAB$. Eine senkrechte Linie CQ aus C auf AE schneidet in R zwischen P und A die Linie AD; denn, wegen $\angle EAB > \angle DAB$ muß $\angle ACQ < \angle ACP$ seyn (107, II), also ist $RD > PD$.

Nun

Nun ist $AR > AQ$ (§ 81); aber auch schon $PD > QE$; um so mehr $AR + RD > AQ + QE$, oder $AD > AE$. Der Beweis ist also immer anwendbar auf die entfernteren; unter diesen ist AF als Tangente aus A gewiß die entfernteste, und daher die kleinste, wenn ihr Berührungspunkt als zum holen Theile gehörig, verstanden wird.

III. Man ziehe die Halbmesser Ck, Cg; nun ist $AC = Ah + hC = Ah + kC < Ak + kC$ (§ 54); und Ck von beiden Seiten weggenommen, giebt $Ah < Ak$. Ferner ist $Ag + gC > Ak + kC$ (89, I) und $gC = kC$ von beiden Seiten abgezogen, giebt $Ag > Ak$; aus dem nämlichen Grunde ist AF die größte aus A an den erhabenen Theil. Der Punkt F vertritt also zwo Stellen, nämlich in II für den holen, und hier für den erhabenen Theil, wie schon (182) erinnert ist.

§. 184. Zusatz. Alle die obigen Schlüsse lassen sich bei Linien auf der andern Seite von AB anbringen. Es kann aber auf jeder Seite der AB eine Linie liegen, die gleiche Winkel mit ihr macht; aber auch nur eine auf jeder Seite, und solche Paare müßen gleich seyn, sowohl am erhabenen, als holen Theile des Kreises verstanden; denn wenn $Cp = CP$, so ist $\triangle CPA \cong CpA$ (§ 87), also $AP = Ap$, auch $PD = pd$ (178, I); auch so $Pk = pi$; folglich $AP + PD = Ap + pd$, oder $AD = Ad$, $AP - Pk = Ap - pi$, oder $Ak = Ai$.

§. 185. Zusatz. Durch die Tangenten AF; Af wird eigentlich die Grenze angegeben, welcher Theil des Kreises in Rücksicht des Punkes A erhaben,

ben, und welcher hohl ist. Aber aus A giebt es allemal zwo Tangenten an den Kreis (157), und ihre Berührungspunkte geben die Grenzen der beiden Theile des Kreises an.

§. 186. Zusatz. Wenn A in h fällt; d. i, wenn A im Kreise liegt; so giebt es für A keinen erhabenen Theil mehr, und alle Linien aus A an dem erhabenen Theile sind = 0; für den hohlen oder den ganzen Kreis gilt nach (183, I) auch wegen (179). Die Linie an dem erhabenen Theile in A ist auch = 0; wegen der Allgemeinheit, daß alle Linien an den erhabenen Theil = 0 werden; dieses versteht sich jedoch nur von AF und Af, allein FT, und ft behalten hier, wie vorhin, ihre unbestimmte Länge, nur F und f treten in h zusammen in einen Punkt. Wegen der, hier nicht zu bestimmenden Länge der FT und ft können sie sowohl = 0, als auch = ∞ werden.

§. 187. Zusatz. I. Wird A im Kreise, nicht aber im Mittelpunkte angenommen, wie in der 71 Figur, so giebt es für A keinen erhabenen Theil. Ein Durchmesser BAh, durch A gelegt, hat ein Stück Ah, welches kleiner, als alle andere Linien aus A an den Kreis sind, und sein größeres Stück AB ist größer, als jede dieser Linien; denn, wenn man die Halbmesser Ck, Cg u. s. w. zieht, so geben sich Dreiecke, worinn $AC + Ak > kC = Ch$ ist; und auf beiden Seiten AC abgezogen, $Ak > Ah$ übrig läßt. Ferner ist in allen Dreiecken $AC + kC > Ak$, wo das linker Hand allemal $AC + CB$, oder das größere Stück ist.

II. Linien, die weiter, als andere vom kleinern Stücke des Durchmessers liegen, oder (welches

ches eben das ist) welche größere Winkel mit ihm machen, sind desto größer, je weiter sie abliegen. Wenn nun gA weiter abliegt, als kA, so schneidet Ag nothwendig den Halbmesser Ck in einem Punkte r, und $gC = kC < gr + rC$ (54), und rC von beiden abgezogen, läßt $gr > rk$; aber $kr + rA > kA$, also um somehr $gr + rA = gA > kA$: Dieser Beweis findet aber für jedes Paar, die so, wie gA und kA, d. i., die eine weiter, die andere näher an hA liegen, statt.

§. 188. Lehrsatz. Wenn sich zween Kreise nur in einem Punkte berühren (berührende Kreise); es sey außerhalb, wie es bei den Kreisen M, N, in C (fig. 72, I) geschieht, oder innerhalb wie m, n, (fig. 72, II) in c; so liegen ihre Mittelpunkte A, B, oder a, b, und der Berührungspunkt C, oder o in einer geraden Linie.

Beweis. Die Kreise M, N haben gewis am Punkte C eine gemeinschaftliche Tangente TV. Nun liegt des Kreises M Mittelpunkt A außerhalb des Kreises N; aber AC ist Halbmesser im Kreise M, und sie fort verlängt, geht durch den Mittelpunkt B des Kreises N (156, II).

In fig 72, II sey m der größere Kreis; sein Mittelpunkt b; man ziehe bc, diese ist größer als des Kreises n Halbmesser; aber bc auf der gemeinschaftlichen Tangente tv senkrecht geht gewiß durch den Mittelpunkt des Kreises n (156, II).

§. 189. Zusatz. Daß der Beweis auch auf mehrere Kreise, die nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, könne erweitert werden, begreift sich aus den angeführten Gründen, welche sich nicht

auf zween Kreise allein einschränken lassen. Will man daher berührende Kreise beschreiben, so nehme man ihre Mittelpunkte auf einer einzigen geraden Linie, so nebeneinander, daß die Halbmesser aller beschriebenen Kreise sich in einem einzigen Punkte c endigen.

§. 190. Lehrsatz. Eine Tangente AB fig. 53 macht mit dem Bogen Da, dem Scheine nach, einen Winkel ADa; dieser Winkel ist kleiner, als jeder anzugebende gradlinigte Winkel.

Bew. Man ziehe die Senne Da; so liegt der Bogen Da zwischen dieser und der Tangente (156, V), und die Señe zwischen Tangente und Halbmesser (das. III). Dieses ist immer so, wie klein auch der Bogen Da wird, d.i. hier, wie nahe auch a an D genommen wird; allein bei einem kleinern Bogen Da wird der gradlinigte Winkel CDa größer (180), und der gradlinigte ADa kleiner; dieses kann so weit gehen, bis CDa = 90° = CDA wird; und ADa kleiner, als jeder angebliche Winkel wird, wo, ehe das geschieht, immer noch der Bogen zwischen Senne und Tangente in seiner vorigen Lage blieb; und also die Größe des scheinbaren Winkels von Tangente und Bogen beständig blieb; daher muß dieser beständige Winkel an sich kleiner, als jeder gradlinigte seyn.

§. 191. Zusatz. I. Die Kreise in der (72, II fig.) haben eine gemeinschaftliche Tangente tv. Man ziehe aus a und b die Linien ag, bg; dann cg als Senne im größern Kreise; so liegt g außerhalb des Kreises n; denn im △ bgc sind die Winkel bei g und c gleich (138): aber a liegt näher an c,

als

als b; daher der Winkel $cgb = gcb > cga$; also ist $ga > ac$ (80, II).

II. Weil dieses immer so ist, wie nahe auch g an c genommen wird; so geht der Bogen des größern Kreises näher an der Tangente hin, als der kleinere; weil er zwischen der Tangente und dem kleinern Bogen liegt.

III. Der größere Kreis ist also weniger krumm, als der kleinere; weil sich seine Bögen weniger von der geraden tv entfernen.

IV. Die Senne cg des größern Kreises, die im gemeinschaftlichen Berührungspunkte C ihren Anfang nimmt, schneidet eher in den kleinen Kreis in f, als sie in g kömmt; weil g außerhalb des kleinen Kreises liegt. Wenn also der gradlinigte Winkel gct (nach 190) kleiner wird, d. i., g näher an c rückt, bis zum Verschwinden der cg, so muß der Bogen cf eher verschwinden, als der Bogen gc.

V. Aber die Bögen gc, fc machen dem Scheine nach doch einen Winkel gcf (ich will ihn Bogenwinkel heißen); und dieser Bogenwinkel kann nicht wohl für nichts angenommen werden; weil sonst die Bögen nicht von einander stünden (wider II). Auch erhellet aus IV, daß dieser Winkel eher verschwindet, als gct, welcher vom größern Kreise und Tangente nach (190) gebildet wird; dieses beweist, meiner Einsicht nach, vollkommen, daß der Winkel gcf so wohl, als gct nicht $= 0$ seyn könne. Alles, was sich hier von diesen Winkeln gcf; gct sagen läßt, dünkt mich, wäre wohl, daß sie sich mit gradlinigten Winkeln nicht vergleichen lassen. — Die Natur der krummen Linien berechtigt

uns

uns auch gar nicht zu dieser Vergleichung. Mir scheint es, als wenn der Bogenwinkel im Berührungspunkte zwar kleiner, als jeder gegebene gradlinigte Winkel sey; allein erst bei verlängten kleinern und größern Bögen seine Größe erhalte, die aber nicht beständig ist; wie dieses in (190) angenommen wird.

Anmerk. Die Untersuchung über die vorher genannten Bögenwinkel hier weiter zu treiben, ist wider die Absicht dieser Anfangsgründe; auch verlohnte es für die hier folgenden Lehren die Mühe nicht. Mir scheint's aber, daß nach den obigen Grundlagen müße fort gearbeitet werden. Auch sind mir keine Untersuchungen dieser Art noch bekannt. Die im Kästnerischen Lehrbuche, 20 Satze, 6 Zus. namhaft gemachten Authoren, nämlich Peletarius, Walisius, sind itzt nicht in meiner Gewalt zu haben.

§. 192. Lehrsatz. Ein reguläres Vieleck ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie allen Seiten des Vieleckes, die Höhe aber der senkrechten Linie aus des Vieleckes Mittelpunkte auf eine Seite gezogen, gleich ist.

Beweis. Die Dreiecke des regulären Vieleckes in der 46 Figur sind gleich, und gleichschenklicht (138); folglich ist in allen einerlei senkrechte Höhe Fg, wie dieses auch aus (178, I) erhellet. In der 73 Figur sey $AH = AB + BC + CD + DE + EA$, d. i., so groß, als alle Seiten des Vieleckes der 46 Figur; und die $\triangle\triangle$ AFB, BCF, CfD, u. s. w. sind die Dreiecke des regulären Vieleckes, in welchen allen einerlei Höhe Fg ist.

Aber

Aber △ AFB = AFB; ferner △ BfC = △ BfC; △ CfD = △ CFD; △ DfE = △ DFE; △ EφH = △ EFH. Die Summe der Dreiecke rechter Hand sind die im Vielecke; und ist der Summe derer linker Hand gleich (Rechenk. 137), und △ AFH enthält die Dreiecke alle linker Hand.

§. 193. Zusatz. I. Im obigen Satze wird keine bestimmte Zahl von Seiten oder Dreiecken zum voraus gesetzt; er bleibt daher wahr, wenn auch das Vieleck unzählig viele Dreiecke hätte.

II. Die Gestalt des Dreieckes, das dem Vielecke gleich ist, kömmt ohnehin nicht in Betrachtung, und es kann daher auch rechtwinklicht seyn (163), wenn es nur die gefoderte Höhe und Grundlinie hat.

III. Ein Theil des regulären Vieleckes ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundlinie so groß ist, als die Seiten des Vieleckes, die diesem Theile zugehören. Z. B. Wenn dem Theile drei Seiten zugehören, so ist das Dreieck, dessen Grundlinie drei Seiten, und die obige Höhe hat, diesem Theile des Vieleckes gleich. In der Figur wäre solch ein Dreieck AFD.

Von den Verhältnissen der Figuren und Linien, und von der Aehnlichkeit geometrischer Figuren.

§. 194. Lehrsatz. I. Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundlinien; oder II. wie die Höhen, wenn die Grundlinien einerlei sind.

Bew.

Beweis. I. A B und E H, fig. 74 seyen die Grundlinien der Parallelogrammen A B C D, und E F G H; die zwischen einerlei Parallelen A H, C G stehen, und daher einerlei Höhe haben (162).

Es lasse sich A B und E H mit A i = E k ausmessen; so, daß A B = p × A i; und E H = q × E k = q × A i sey; wo p, q ganze Zahlen bedeuten.

Man ziehe l i der A C und k m der E F parallel, so sind A C l i und E F m k Parallelogramme, die gleich sind (160); und wenn man in der Weite jeder A i und E k so verfährt, so erhält man p Parallelogramme; jedes = A C l i in A C D B; und q Parallelogramme, jedes = E F m k in E F G H; daher A C D B : E F G H = p × A C l i : q × E F m k = p : q (Rechnenk. 106) = p × A i : q × E K = A B : E H.

Wenn sich in der 75ten Figur A B durch A b und D E durch D d = A b messen lassen, so, daß A B = p × A b und D E = q × D d ist, so erhält man im △ A B C = p Dreiecke, jedes = A C b, und im Dreiecke D E F q Dreiecke, jedes = D F d; und △ A C b = △ D F d (161). Daher hier die nämlichen Schlüsse gelten, wie oben bei Parallelogrammen.

II. Es seyen in der 76ten Figur A B, a b die Grundlinien der Parallelogramme A B C D; a b c d, und A B = a b; die Höhen sind A E; c e; so sind die rechtwinklichten A E F B; c e d f den vorigen gleich (163), und E F = A B = a b = c d = e f (114); daher kann man A B, a b wie die Höhen, A E, c e wie die Grundlinien ansehen; und bei der

An=

Annahme, daß sich A E, ce mit einem gemeinschaftlichen Maaße messen lassen, ist dieser Satz mit I völlig einerlei.

§. 195. Zusatz. Die Voraussetzung, daß sich die Grundlinien der Parallelogramme und der Dreiecke mit einerlei Maaße ausmessen lassen, ist schon in (24) erwiesen, und kann wahr seyn, wenn AB, EH ein Rationalverhältniß zu einander haben: stehen sie in einem Irrationalverhältniß, so kann man hier noch als Zugabe zu (24) merken, daß man AB in der 74ten Figur mit Ai gewiß wird ausmessen können, wenn Ai durch fortgesetzte Halbirungen wäre gefunden worden; und daher gewiß r. Ai = AB ist, wo r eine ganze und zwar eine gerade Zahl wäre. Ist nun EH mit Ai nicht ausmeßbar, so, daß t. Ai + etwas = EH wäre, welches Etwas doch gewiß kleiner, als Ai ist; so halbire man Ai, und es sey $\frac{Ai}{2} = \alpha$ oder $2.\alpha = Ai$; und $AB = r.2\alpha = 2r.\alpha$, und es muß $EH > 2t \times \alpha$ seyn. Nun kann $EH > (2t+1) \times \alpha$ seyn, aber gewiß ist es nach der obigen Voraussetzung kleiner, als $(2t+2) \times \alpha$; daher fällt das unausmeßbare Stückchen der EH zwischen zwei Theile, die, wie α, sind; und es ist $EH > (2t+1) \times \alpha$; aber das, um was es größer ist, beträgt hier wieder kein α; so, wie es oben kein Ai betrug. Dieses heißt nun:

I. Wie man immer kleinere Theile durch fortgesetzte Halbirungen in AB nimmt, womit sich AB allemal ausmessen läßt, so wird man die EH mit diesen kleinern Theilen immer näher ausmessen können.

II. Niemal ist das unausmeßbare Stückchen der EA so groß, daß es einen Theil von der letztern Halbirung der Ai betrage; folglich nimmt der unausmeßbare Theil nicht nur bei immer kleinern gebrauchten Maßtheilen ab; sondern er wird auch selbst kleiner, als ein solches Maßtheil.

Da man aber durch fortgesetztes Halbiren der Ai, oder durch immer kleiner genommene α gewiß endlich auf solche α kömmt, welche kleiner, als jede noch angebliche Länge seyn werden, so muß der unausmeßbare Theil der EH noch viel eher kleiner seyn, als eine jede angebliche Länge. Dieser unausmeßbare Theil nun, der kleiner als jede gegebene Länge ist, muß für verschwunden können angenommen werden; und in diesem Zustande sey $p \times Ai = AB$; und $q . Ai = EH$; wo p, q ganze Zahlen sind; und Ai so klein ist, daß der ungemessene Rest in EH für verschwindend geachtet wird. Wäre AB der in (26) vorgeschlagene Maßstab, so wird hier abermal begreiflich, wie jede Linie mit dem angenommenen Maßstabe, der in hinlänglich kleine Theile getheilt ist, ausmeßbar sey. Da man aber in der Anwendung nicht eben immer bis auf möglichst kleine Theile gehen will, weil bei einem großen Ganzen schon Theile für verschwindend können angenommen werden, deren Größe noch immer merkbar ist; so begreift sichs, daß die Gründe der Theorie mehr, als zureichend für die Praktik sind; nur muß der praktische Fall mit dem theoretischen Satze einerlei in der Voraussetzung seyn, daß man nämlich dort, wie hier, die Theile des Maßstabes so klein nehmen kann, als man will.

§. 196.

§. 196. Lehrsatz. Parallelogramme und Dreiecke verhalten sich bei verschiedenen Höhen und verschiedenen Grundlinien, wie die Produkte aus ihren Höhen in ihre Grundlinien, das ist, sie sind im zusammengesetzten Verhältnisse (in ratione dupla), ihrer Höhen und Grundlinien; oder das Parallelogramm A habe die Höhe $= H$, die Grundlinie $= G$; des andern Parallelogramms a Höhe sey $= h$, Grundlinie $= g$; so ist $A : a = H \times G : h \times g$.

Beweis. Man kann allemal ein drittes Parallelogramm P machen, dessen Höhe $= H$, und Grundlinie $= g$ sey (121), und so hat man

$A : P = G : g$ (194) und
$P : a = H : h$ folglich

$A : a = G \times H : g \times h$ (Rechenk. 115).

Daß der Satz eben so von Dreiecken zu beweisen ist, ist für sich klar.

§. 197. Zusatz. Wenn $G \times H = g \times h$, d. i. wenn die Parallelogramme gleich sind; so ist $G : g = h : H$; oder bei gleichen Parallelogrammen verhalten sich die Höhen verkehrt, wie die Grundlinien (Rechenk. 348).

§. 198. Zusatz. Der vorige Zusatz enthält ein neues Merkmal der Umstände, unter denen Parallelogramme und Dreiecke gleich seyn können.

§. 199. Zusatz. Wenn $g = h$ seyn soll, doch alles wie in (197), oder wenn ein Parallelogramm einem Quadrate gleich seyn soll; so ist $G : g = g : H$, d. i., $G \times H = g^2$, oder die Seite g des Quadrates ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Höhe und Grundlinie des ihm gleichen Parallelogrammes.

§. 200. Zusatz. Dreiecke, die mit Parallelogrammen gleiche Höhe und Grundlinie haben, sind die Hälften von solchen Parallelogrammen (120); daher würden eigentlich für Dreiecke die obigen Verhältnisse $G \times H : g \times h$ halbirt, gelten; wenn man bestimmen wollte, ob man Dreiecke oder Parallelogramme verglichen hätte.

§. 201. Zusatz. Nach (Rechenkunst 366) ist $G \times H : g \times h = (G:g) + (H:h) = A : a$, oder $G \times H : g \times h = \frac{G}{g} \times \frac{H}{h}$.

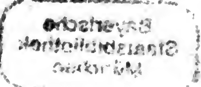
Nun sey bei ein Paar Parallelogrammen oder Dreiecken folgendes wahr; $G : g = H : h$, oder $G : H = g : h$, d. h., die Höhen sollen sich, wie die Grundlinien verhalten; so ist $\frac{G}{g} = \frac{H}{h}$.

Daher nun $G \times H : g \times h = \frac{G}{g} \times \frac{G}{g} = \frac{H}{h} \times \frac{H}{h} = \frac{G^2}{g^2} = \frac{H^2}{h^2} = G^2 : g^2 = H^2 : h^2 = A : a$.

In diesem Falle nun sagt man, die Parallelogramme oder Dreiecke sind im verdoppelten Verhältnisse (in ratione duplicata) ihrer Höhe oder ihrer Grundlinie.

§. 202. Lehrsatz. I. Wenn in einem Dreiecke ABC (77 fig.) eine Linie DE mit einer AB parallel gezogen wird, so, daß diese Parallele in die Schenkel des ihr gegenüber liegenden Winkels einschneidet, so verhalten sich die Stücke des einen Schenkels, wie die des andern in der nämlichen Lage genommen, oder es ist $CD : DA = CE : EB$.

II.



II. Wenn diese Proportion statt hat, so liegt DE mit AB parallel.

Beweis. I. Man ziehe DB; AE, so ist △ ADE = △ DEB (161); aber die Dreiecke CDE, ADE stehen auf einer geraden Linie AC, und ihre gemeinschaftliche Spitze ist in E; sie haben daher einerlei Höhe; folglich ist △ CDE : ADE = CD : AD (194). Eben so stehen △△ CDE und DEB auf einer geraden Linie CB, und ihre Spitzen in D; daher ist auch △ CDE : △ DEB = CE : EB. In diesen beiden Proportionen ist aber das erste Verhältniß einerlei; folglich CD : AD = CE : EB (Rechenk. 137, II).

II. Wenn CD : AD = CE : EB; und DE wäre nicht parallel mit AB, so könnte man durch D eine andere, etwa Dg, parallel ziehen (94, II); und man erhielt wegen (I) CD : AD = Cg : gB; aus beiden Proportionen müßte folgen CE : EB = Cg : gB; auch CE + EB : CE = Cg + gB : Cg (Rechenk. 351), oder CB : CE = CB : Cg; das ist, CB : CB = CE : Cg, und weil CB = CB, so wäre CE = Cg, welches widersprechend ist; dieser Widerspruch muß also vom Grunde der zweiten Proportion herrühren; folglich giebt es keine andere parallele mit AB, außer DE.

§. 203. Zusatz. Aus I wird auch durch Verwechselung CD : CE = AD : EB; das heißt: Die ähnlich liegenden Stücke geben in den Schenkeln wechselweise gleiche Verhältnisse.

§. 204. Zusatz. Auch wird aus (I); CD + AD : CD = CE + EB : CE, d.i., CA : CD

 =

= CB : CE; auch CA : DA = CE : EB, d. i., die ganzen Schenkel und ähnlich liegenden Stücke in ihnen geben gleiche Verhältnisse. Ferner hieraus CA : CB = CD : CE = DA : EB, d. i., die ganzen Schenkel verhalten sich, wie ähnlich liegende Stücke in ihnen.

§. 205. Lehrsatz. I. Wenn in zweien Dreiecken ABC, abc fig. 78 die Winkel einzeln gleich sind, so verhält sich jedes Paar Seiten in einem Dreiecke, wie ein Paar im andern, in der Ordnung, wie sie gleichen Winkeln gegenüber stehen; d. h., Paare ähnlich liegender Seiten dieser Dreiecke sind proportional.

II. Wenn die Seiten proportional sind, so sind die Winkel, die von proportionalen Seiten eingeschlossen werden, gleich.

Beweis. Die Winkel, die mit gleichen Buchstaben genannt sind, seyen gleich. Man lege das △ cab so auf das △ CAB, daß c den Winkel C decke (19), und a liege in α; b in β, so deckt ab die αβ; daß ca = Cα; cb = Cβ sey; in dieser Lage ist ab parallel mit AB (§ 97, II), und man hat wegen (204) CA : CB = Cα : Cβ = ca : cb (☉).

Man ziehe Eβ mit AC parallel, so ist AE = αβ (§ 114, I); und man hat AB : CB = (AE = αβ) : CB oder AB : CB = ab : cb (☽). Aus dieser letzten Proportion und der in (☉) wird AB : CA = ab : ca (Rechenk. 361). (♀) die Proportionen ☉, ☽, ♀ geben den Beweis für I.

II. Es seyen die Proportionen ☉, ☽, ♀ in I bei den △ △ ABC, abc vorhanden.

Man

Man trage eine Seite des △ abc in eine des △ ABC, und zwar in solche, womit sie unmittelbar im Verhältniß stehe. Diese Foderung zu erläutern, werde aus (⊙) CA : ca = CB : cb; also wird ca in CA, oder cb in CB getragen. Es sey ca = Cα gemacht; durch α lege man $\alpha\beta$ mit AB parallel, so ist CA : CB = Cα : Cβ (204), und hieraus und aus (⊙) erhält man Cα : Cβ = ca : cb; und Cα : ca = Cβ : cb; aber Cα = ca; folglich Cβ = cb.

Ferner wegen $\alpha\beta$ parallel mit AB ist AB : CA = $\alpha\beta$: Cα; aus dieser Proportion und (♀) wird $\alpha\beta$: Cα = ab : ca, oder $\alpha\beta$: ab = Cα : ca, folglich ist $\alpha\beta$ = ab, weil Cα = ca. Daher △ abc ≅ △ $\alpha\beta$C (66): aber im letzten Dreiecke sind die im Satze genannten Winkel einzelnen gleich; also auch im erstern.

§. 206. Lehrsatz. Wenn in zweien Dreiecken ABC, abc fig. 78 ein Winkel C = c, und die diesen Winkel einschliessenden Seiten in beiden Dreiecken gleiche Verhältnisse haben; d. i., wenn auch CA : CB = ca : cb, so ist alles in ihnen, wie in (205).

Beweis. Wird das kleinere Dreieck abc auf das ABC so gelegt, daß c auf C gehörig liege, so wird ca eine Länge Cα in CA; cb eine Länge Cβ in CB decken; und so Cα = ca, Cβ = cb seyn; auch ab die $\alpha\beta$ decken, ohne daß man itzt noch weiß, daß die so liegende ab mit AB parallel sey; welches man eben im Beweise darzuthun sucht.

Nun ist, Vermöge der Bedingniß; CA : CB = Cα : Cβ; oder CA — Cα : Cα = CB — Cβ : Cβ;

 folg-

folglich ist $\alpha\beta$ oder ab der AB parallel (202, II), und der Satz (205) vorhanden.

§. 207. Lehrsatz. Wenn man in einem △ ABC fig. 98, einen Winkel C halbirt durch eine Linie CE, so verhalten sich die Stücke AE, EB, welche von dieser halbirenden CE in der, dem so getheilten Winkel gegenüber liegenden Seite abgeschnitten werden, wie die anliegenden Schenkel des getheilten Winkels; oder es ist AC : CB = AE : EB.

Beweis. Man ziehe durch B die BD parallel mit EC; und AC werde verlängt bis sie die BD in D treffe; dieses Zusammentreffen erfolgt gewiß, weil schon AC die EC geschnitten hat (99, IV). Nun ist ∢ D = ∢ m (102, II), und ∢ o = ∢ n (102, I); folglich △ EBD gleichschenklicht; und CB = CD (62). Aber man hat, wegen (202, I) AC : CD = AE : EB; das ist, AC : CB = AE : EB.

Anmerk. Die in (202) namhafte Eigenschaft zweier Dreiecke heißt ihre Aehnlichkeit. Man fodert überhaupt, daß Figuren, die ähnlich seyn sollen, einzeln gleiche Winkel so, wie sie in einerlei Ordnung auf einander folgen, haben; und noch über dieses, daß jedes Paar Seiten, die gleiche Winkel einschliessen (ähnlich liegende Seiten) in solchen Figuren gleiche Verhältnisse geben.

Bei Dreiecken braucht man nur eine dieser Eigenschaften, oder auch nur die in (206) ausgedruckte, als vorhanden, zu wissen, so geben die Beweise in (202) die andern auch als vorhanden an. Bei den übrigen Figuren muß man beide haben, wenn sie ähnlich seyn sollen.

Daß aber unter den gedachten Umständen die Figuren in dem Sinne (§ 16) ähnlich sind, ist wohl deut=

deutlich; hier könnte man, ohne den philosophischen Sinn von Aehnlichkeit zu Hilfe zu nehmen, die gedachte Eigenschaft geometrischer Figuren mit dem Worte: Aehnlichkeit benennen, und den Begriff davon nur auf die obige Erklärung legen; und dieses wäre dann die geometrische Aehnlichkeit. Die ganze Entwickelung dieses Begriffs, wann er nämlich mehrseitigen Figuren zukomme, wird noch in der Folge näher gegeben werden.

§. 208. **Aufgabe. Zu zwo gegebenen Linien** a, b, fig. 79 **die dritte Proportionallinie** p. **zu finden.**

Auflösung. Man mache einen beliebigen Winkel W; und trage in dessen einen Schenkel W D, die Linie a = W m; in den andern, b = W n; dann wieder in den erstern, worinn a liegt, b = m d; und ziehe e d mit m n parallel; so ist n e = p, die verlangte Proportionallinie.

Beweis. Weil m n parallel e d, so hat man W m : W n = m d : n e (205), d. i. a : b = b : p.

§. 209. **Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien** a, b, c, **die vierte Proportionallinie zu finden.**

Auflösung. Es geschieht alles, wie in (208); nur daß m d = c genommen wird, und so wird n e die vierte Proportionallinie.

Beweis. Dieser ist auch der nämliche, wie oben.

§. 210. **Aufgabe. Zu zwo gegebenen Linien** a, b, fig. 80. **die mittlere Proportionallinie** p **zu finden.**

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie CD, deren Länge = a + b ist. Aus der Mitte dieser CD beschreibe man mit $\frac{1}{2}$ CD einen halben Kreis CFD;

dann errichte man in E, nämlich im Punkte des Zusammenstosses der a und b, die senkrechte EF bis an den Kreis; so ist EF die verlangte mittlere Proportionallinie.

Beweis. Man ziehe CF; FD. Im △ CFD ist bei F ein rechter Winkel (§ 124); dieses Dreieck hat aber mit dem rechtwinklichten △ CFE den Winkel m gemein; also ist auch ∢ x = ∢ y (107); hieraus nun folgt bei den beiden rechtwinklichten Dreiecken CFE, DFE die Gleichheit aller Winkel, und daher △ CFE ∽ △ DFE; folglich CE : EF = EF : ED, oder a : p = p : b (205).

§. 211. Zusatz I. Weil im △ CFD auch die Winkel einzeln, mit jenen der △ △ CFE; DFE gleich sind, so ist △ CFD ∽ △ CFE ∽ △ DFE; und der Satz heißt: Aus eines rechtwinklichten Dreieckes rechten Winkel, eine senkrechte Linie auf die Hypothenuse, theilt dieses Dreieck in zwei ähnliche Dreiecke, die wieder dem ganzen Dreiecke ähnlich sind.

II. Folglich hat man auch CE : CF = CF : CD; und hieraus wird $CE \times CD = CF^2$ (Rechenkunst 346).

Aber auch ED : FD = FD : CD; und daher wird $ED \times CD = FD^2$; addirt man in den gleichen Produkten was rechter Hand, und das, was linker Hand steht, zusammen, so hat man $(ED \times CD) + (CE \times CD) = CF^2 + FD^2$; aber $(ED \times CD) + (CE \times ED) = CD \times (ED + CE)$; (Rechenk. 182. Zus.) $= CD \times CD = CD^2$; folglich $CF^2 + FD^2 = CD^2$, welches der Satz (175) ist.

§. 212.

§. 212. Zusatz. I. FE ist eine halbe Senne (§ 128, I); CE; ED die zwei Stücke des Durchmessers; daher ist die halbe Senne die mittlere Proportionallinie zwischen den beiden Stücken des Durchmessers, die von ihr senkrecht geschnitten werden. Diese Stücke sind die Höhen der zugehörigen Bögen (§ 181).

II. Weil sowohl CE : EF = EF : ED, als auch ED : EF = EF : CE, so ist jedes Stück des Durchmessers die dritte Proportionallinie zu dem andern Stücke und der halben Senne.

III. Den Mittelpunkt eines Kreisbogens zu finden, ziehe man dessen Senne; halbire sie senkrecht, und suche zur Höhe des Bogens und halber Senne die dritte Proportionallinie (208); diese wird in die verlängte Höhe des Bogens getragen; und so ist die Höhe des Bogens + dieser angelegten dritten Proportionallinie, der Durchmesser, in dessen Mitte der Mittelpunkt ist. Dieses ist eine andere Auflösung, worinn man eben das, wie in (150) erhält.

§. 213. Zusatz. Wenn CE = 1 angenommen wird; und ED = n . CE; d. i. wenn ED eine gewisse Zahl vorstellt, deren Einheit CE ist; so ist EF die Quadratwurzel dieser Zahl; denn $EF^2 = CE \times ED = 1 . n$ und $EF = \sqrt{1 . n} = \sqrt{n}$ (Rechenk. 347).

§. 214. Zusatz I. Wäre CE die Höhe, ED die Grundlinie eines Parallelogramms, so ist EF die Linie zum Quadrate, welches dem Parallelogramm gleich ist (§ 199). Aber $\frac{CE \times ED}{2}$ =

$= \frac{1}{2}$ CE×ED oder CE×$\frac{1}{2}$ED gilt für den Inhalt des Dreieckes, dessen Grundlinie und Höhe die obige Linien sind (§200); also ist auch hier eine EF die Seite zum Quadrate, das einem Dreiecke gleich ist, wenn diese EF die mittlere Proportionallinie zwischen halber Grundlinie und ganzer Höhe, oder zwischen ganzer Grundlinie und halber Höhe genommen ist. Denn es ist hier EF $= \sqrt{(\frac{1}{2} CE \times ED)}$.

II. EF oder die Linie p ist immer kleiner, als der Halbmesser, wenn a und b ungleich sind (178); und in diesem Sinne ist $(a + b) > 2p$; da nun das Parallelogramm $2a + 2b$ zum Umfange, oder zu seiner ganzen Grenze hat (109), so ist des Quadrates Umfang, das dem Parallelogramm gleich ist, $= 4p < 2(a+b)$, daher hat das Quadrat den kleinsten Umfang unter den Parallelogrammen, mit denen es gleichen Inhalt hat. Dieses ist als eine Fortsetzung von (166) anzusehen.

§. 215. Aufgabe. Eine gegebene Linie AB fig. 81 in verlangte gleiche Theile z. B. in 5, zu theilen.

Auflösung. Man trage auf eine Linie CA eine Länge A 1, so vielmal neben einander, als man Theile verlangt, und bemerke die Endpunkte 1, 2, 3, u. s. w. dieser aufgetragenen A 1; dieses wird sich allemal thun lassen (§ 26).

Man lege die zu theilende Linie unter einem beliebigen Winkel BAC an die, aus gleichen Theilen bestehende AC; und ziehe CB (7, II); mit CB Parallellinien s, 4; r, 3; q, 2; p, 1; durch die Punkte 4, 3, u. s. w. gezogen, theilen die AB nach der Angabe.

Bew.

Beweis. C, 4 = 4; 3 = 3; 2 = 2; 1 = 1, A wegen der Verzeichnung; aber AC: A 1 = AB: Ap (204); auch ist C; 4 = $\frac{1}{n}$. AC (wenn n = 5, so ist C; 4 = $\frac{1}{5}$ AC); also auch Ap = $\frac{1}{n}$. AB (Rechenk. 107, II). Zur Fortsetzung des Beweises für die übrigen Theile, kann man so verfahren:

A, 1 : 1, 2 = Ap : pq; aber A, 1 = 1, 2; folglich Ap = pq; jedes Paar aber ist so groß, als gleiche nte Theile ihrer Linien AC, AB. Ferner ist A; 2 : 2; 3 = Aq : rq, oder $\frac{2}{n}$. AC : $\frac{1}{n}$ AC = $\frac{2}{n}$. AB : $\frac{1}{n}$. AB. u.s.w.

§. 216. Aufgabe. Eine Linie in Theile zu theilen, die sich so zu einander verhalten, wie die, einer schon getheilten Linie.

Auflösung. Wenn die getheilte Linie CA, und die zu theilende AB in fig. 81 wäre, so ist die Auflösung genau die nämliche, und so auch der Beweis, wie in der vorigen Aufgabe.

Von der Aehnlichkeit der Figuren, die mehr als drei Seiten haben.

§. 217. Erklärung. Wenn in mehrseitigen Figuren, deren Seitenzahl einerlei ist; die Winkel, wie sie in solchen Figuren auf einander folgen, einzeln gleich sind; und die Seiten, die entweder glei=

gleiche Winkel einschliessen, oder, wie sie zwischen gleichen Winkeln liegen, sich in der einen Figur beständig so verhalten, wie in der andern; so heißt man diese Eigenschaft solcher Figuren: Aehnlichkeit.

§. 218. Zusatz. Die 82te Figur sey der 83ten ähnlich. Die Winkel, die mit einerlei Buchstaben bezeichnet sind, sollen in beiden Figuren gleich seyn; so wäre AB : BC = ab : bc, woher dann AB : ab = BC : bc (☉). Ferner BC : CD = bc : cd; oder BC : bc = CD : cd (☽). Ferner CD : DE = cd : de; oder CD : cd = DE : de (♀). Ferner DE : EA = de : ea, und DE : de = EA : ea (♀); und diese Folge sey so beständig, wie viele Seiten auch ein Paar solcher Figuren haben; so ist klar, daß ☉, ☽, ♀, ♀ diese mehrfachstetige Proportion geben (Rechenkunst 355). Es ist nämlich nun AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea u. s. w.; folglich sind Figuren ähnlich, wenn diese mehrfachstetige Proportion ihrer Seiten, und die obige Gleichheit der Winkel statt hat.

§. 219 Zusatz. Reguläre Vielecke von der nämlichen Zahl Seiten sind ähnlich; denn die Winkel sind einzeln gleich (§ 137), und die Seiten machen ohnehin ein mehrfachstetige Proportion, weil das Verhältniß zwischen ihnen beständig = 1 : 1 ist.

§. 220. Lehrsatz. Wenn man in ähnlichen Figuren Diagonallinien aus gleichen Winkeln zieht, die die Figuren in Dreiecke theilen; dergleichen in der 82ten und 83ten Figur BE, BD, be, bd, sind; die entweder aus einem Punkte B nach den andern Winkelspunkten oder aus andern Punkten zu andern

dern gelegt sind, wie in der 84ten und 85ten Figur AE, EB, DB; ab, eb, db sind: so werden die Figuren in ähnliche Dreiecke getheilt; und diese Diagonale sind, wie sie ähnlich liegen, (in gleiche Winkel gezogen sind), mit jedem Paar ähnlich liegender Seiten proportional.

Beweis. In der 82ten Figur ist △ ABE ∽ △ abe in der 83ten Figur (§ 206) und (α) AB: ab = BE : be; auch ∢ m = ∢ n. Da aber ∢ AED = ∢ aed; so ist ∢ AED − ∢ m = ∢ BED = ∢ aed − ∢ n = ∢ bed.

Wegen (§ 218) ist nun AB:ab = ED : ed; also hieraus und aus (α) ED : ed = BE: be; folglich auch △ BED ∽ △ bed (§ 206) und ∢ r = ∢ s, auch ∢ EDC − r = ∢ BDC = ∢ edb − s = ∢ bdc; und ED : ed = DB : db (β) aber wegen (§ 218) ED : ed = DC : dc; folg. △ DBC ∽ △ dbc. Daß dieser Beweis nach eben dem Gange für noch folgende Dreiecke fortgesetzt werden könne; ist sehr deutlich; weil man nur die nämlichen Schlüsse wiederholt. Der Beweis für den Fall der 84ten und 85ten Figur wird auf die nämliche Art geführt; wobei man aus den oben angeführten Gründen zuerst annehmen kann △ AFE ∽ △ afe; und die Schlüsse, wie oben, fortsetzt.

Aus den obigen Proportionen wird AB : ab = BE : be = DB : db; und daher treten solche ähnlich gezogene Diagonallinien mit in die mehrfachstetige Proportion (218); d. i., diese Diagonallinien, geben Verhältnisse, die dem, von jedem Paare ähnlich liegender Seiten, gleich sind.

§. 221.

§. 221. Zusatz. Will man den obigen Satz umkehren, nämlich: daß aus ähnlichen Dreiecken, ähnliche Figuren zusammengesetzt werden können, so muß folgende Bedingniß erfüllet werden:

I. Daß die Seiten dieser Dreiecke, die unmittelbar im Verhältnisse stehen, bei dem Zusammensatze, ähnliche Lage bekommen; woraus dann folgen wird,

II. Daß die Seiten dieser Dreiecke wechselweise die mehrfachstetige Proportion geben. Bei diesen zwo Voraussetzungen nun erhält man Figuren von der zur Aehnlichkeit erfoderlichen Eigenschaft (§ 217).

§. 222. Zusatz. Wenn die Figuren 87 und 88 ähnlich sind, und man zieht die Linien GH, gh aus ähnlich liegenden Punkten G, H, g, h; so erhält man $FGHA \backsim fgha$; und $GEDCBH \backsim gedcbh$; denn, wenn die Punkte ähnlich liegen, so ist $FE : FG = fe : fg$; oder auch $FE : GE = fe : ge$; daher $GE : FG = ge : fg$ (Rechenkunst § 361); eben so würde folgen $AH : AB = ah : ab$; daher nun $FE : fe = FG : fg = AH : ah = AB : ab = AF : af$. Man ziehe FH, fh; so ist wegen der Aehnlichkeit der Figuren $\sphericalangle A = \sphericalangle a$, und wegen oben $AF : af = AH : ah$; $\triangle AFH \backsim \triangle afh$ (206), und $\sphericalangle AFH = \sphericalangle afh$ und $\sphericalangle AHF = \sphericalangle ahf$; und weil auch $\sphericalangle AFE - \sphericalangle AFH = \sphericalangle HFE = \sphericalangle afe - afh = \sphericalangle hfe$; und $AF : af = FH : fh = FG : fg$; so ist $\triangle FHG \backsim \triangle fhg$; daher $\sphericalangle FHG = \sphericalangle fhg$ und $\sphericalangle FGH = \sphericalangle fgh$; folglich $\sphericalangle AHF + \sphericalangle FHG = \sphericalangle agf + \sphericalangle fhg$; d.i., $\sphericalangle AHG = \sphericalangle ahg$; auch so $\sphericalangle FGH$

=

= ∢ fgh; daher nun die Figuren AHGF, ahgf auf einander folgende gleiche Winkel haben, und auch nach dem eben geführten Beweise sind die ähnlich liegenden Seiten in beständig gleichen Verhältnissen; sie sind demnach ähnlich (§ 217). Für die Aehnlichkeit der Figuren GEDCBH, gedcbh folgt das nämliche aus eben den Gründen.

§. 223. Aufgabe. Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen ähnlich ist.

Auflösung. Erster Fall. Wenn die gegebene Figur verzeichnet wäre wie ABCDEFG fig. 89, oder ABCDEF fig. 90. Man ziehe in der 89ten Figur Diagonallinien AC, AD, AE, u. s. w. aus einem Punkte A in die gehörigen Winkel; ferner ziehe man bc parallel mit BC, durch c die cd parallel mit CD, und so herum, so ist abcdefg ∽ ABCDEFG.

Auch kann die Auflösung so geschehen, daß man in der Fläche der Figur einen Punkt annehme, wie F in der 90ten Figur, und aus diesem Punkte Linien FA, FB, u. s. w. in die Winkelpunkte zieht; dann aber ab mit AB, bc mit BC u. s. w. parallel, jedoch so zieht, daß die Linien ab, bc, cd u. s. w. ununterbrochen zusammen hängen, und Winkel bilden.

Sollte die gesuchte ähnliche Figur größer als die gegebene werden, so dürfte man nur in der 89 Figur, die Linie AB, AC, AD, u. s. w.; in der 90ten die Linien FA, FB, FC, u. s. w. verlängen, und so außerhalb der Grenzlinien der gegebenen Figur die obigen Parallellinien legen.

Zwei=

Zweiter Fall. Es werden nur die verhältnißmäsigen Längen von den Seiten der Dreiecke, die die gegebene Figur ausmachen, angegeben; wobei nothwendig auch angegeben seyn muß, welche Linien Diagonallinien seyen, oder, welche Linie zu zwei, aneinandergrenzenden Dreiecken, zugleich gehört.

Man verzeichne nun eine Figur völlig nach (174, I); jedoch müßen sich die Seiten der Dreiecke in der so zu verzeichnenden Figur beständig so verhalten, wie die der Dreiecke in der gegebenen. Dieses nun zu bewerkstelligen, könnte folgende Weisung dienen.

Man soll ein Dreieck afe verzeichnen, welches dem △ AFE fig. 84 ähnlich ist, wo von letzterm die Verhältniß der Seiten angegeben wird. Man nehme eine Linie af willkürlich lang (weil nämlich bisher noch nicht bestimmt gefodert wurde, wie viel größer oder kleiner die zu verzeichnende Figur, als die gegebene seyn soll), und suche zu AF, FE und af die 4te Proportionallinie; sie wird fe seyn; ferner zu AF, AE; und af die vierte ae, und so hätte man die Seiten af, fe, ae zum verlangten Dreiecke. Auf eben die Art würde das △ aeb, aus Linien, die mit denen des △ AEB proportional sind, verzeichnet; hier wäre nämlich AE : EB = ae : eb genommen, wo eb gefunden wird, und so nach diesem ab. Diese Arbeit müßte so bei jedem Dreiecke der zu verzeichnenden Figur wiederholt werden.

Nur soll diese Weisung die Möglichkeit zeigen; es wird in der Folge gewiesen werden, daß man diese Arbeit etwas abkürzen könne.

Drit=

Dritter Fall. Die Winkel einer Figur, nebst dem Verhältnisse der Seiten werden angegeben.

Befolgt man die in (174, II) gegebene Weisung, nur hier mit der weitern Bemerkung, daß man jeden gleichen Winkel mit Seiten einschließt, die sich so verhalten, wie die Seiten in der gegebenen Figur, die den nämlichen Winkel einschließen, so erhält man eine ähnliche Figur.

Beweis. Daß im ersten Falle die Figuren gleiche Winkel in einerlei Aufeinanderfolge erhalten, ist aus (§ 102, II) klar; denn $\sphericalangle ABC = \sphericalangle Abc$; eben so $\sphericalangle ACB = \sphericalangle Acb$ und $\sphericalangle ACD = \sphericalangle Acd$; folglich $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD = \sphericalangle C = \sphericalangle Acb + \sphericalangle Acd = \sphericalangle bcd$; und so von den übrigen.

Es ist aber auch $AB : Ab = AC : Ac = AD : Ad = AE : Ae$, u. s. w. (§ 204); ferner ist $AC : Ac = BC : bc = CD : cd$; und $AE : Ae = ED : ed = EF : ef$ u. s. w.; folglich $AB : Ab = BC : bc = CD : cd = ED : ed = EF : ef$ u. s. w. und so ist nun auch die andere Eigenschaft (218) (das beständige einerlei Verhältniß der Seiten, nämlich) die zur Aehnlichkeit der Figuren noch gefodert wird, erwiesener Masen vorhanden.

Für den zweiten Fall. Daß die so zusammengesetzte Figur mit der gegebenen gleiche Winkel erhalte, braucht nur gezeigt zu werden; indem die mehrfachstetige Proportion schon, vermöge der Verzeichnung, vorhanden ist.

Die Dreiecke in der verzeichneten Figur liegen auf die nämliche Art nebeneinander, wie in der gegebenen, und haben einzeln gleiche Winkel mit

denen in der gegebenen (§ 205, II). Daher entstehen aus dem Zusammensatze solcher gleichen Winkel in der verzeichneten Figur, Winkel, die, weil sie aus den nämlichen Theilen, wie die in der gegebenen bestehen, diesen auch nothwendig einzeln gleich seyn müßen.

Für den dritten Fall. Dieser Fall bedarf keines Beweises; die Foderung nämlich, die bei der Verzeichnung beobachtet werden muß, ist aus den in (174) angeführten Gründen möglich; und so liegt der Grund zur Aehnlichkeit im Verfahren selbst.

Anmerk. Werden die Handgriffe entweder beim Vortrage gezeigt, oder beobachtet man das Gefoderte, indem man selbst Figuren verzeichnet, so wird die Sache gewiß leicht und vollständig begriffen. Ohne diese Uibungen aber können vielleicht Dunkelheiten dem Begriffe hinderlich seyn, die auch die ausgedehnteste Beschreibung nicht heben wird.

§. 224. Lehrsatz. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich, wie ein Paar ähnlich liegende Linien in ihnen.

Beweis. Wenn die 82te Figur der 83ten ähnlich ist, so hat man $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de$; folglich auch $AB + BC + CD + DE : ab + bc + cd + de = AB : ab$ (Rechenk. 356); aber $AB : ab = EB : eb$ u. s. w. (220, 222).

§ 225. Zusatz. In regulären Vielecken von gleicher Seitenzahl sind Linien aus ihrem Mittelpunkte in die Winkelsspitzen gezogen (Halbmesser des umschriebenen Kreises) gewiß ähnlich liegende Li=

Linien; daher verhalten sich die Umfänge solcher regulären Vielecke, wie diese Halbmesser.

Vom Maaſe der Flächen.

§. 226. Erklärung. Daß das Maas zur Fläche selbst eine Fläche seyn müße, erhellet aus dem Begriffe, daß der Maasstab als Einheit zur Größe, gewiß mit der Größe gleichartig seyn müße; weil man ja dabei die Größe als das Ganze, und den Maasstab als Theil dieses Ganzen annimmt.

Die Gestalt dieser Fläche, die man zum Maasstabe brauchen solle, läßt sich aus dem obigen Begriffe noch nicht bestimmen; die Sätze (§ 196-201) geben nur die Vermuthung, daß die schicklichste Gestalt des Maasstabes ein Quadrat ist. Kann man beweisen, daß sich jede Fläche durch das Quadrat des Maasstabes, dessen Linie man willkürlich lang annimmt, ausmessen lasse, so ist die Vermuthung gerechtfertiget, und die Figur des Maasstabes, das Quadrat nämlich, ist eine schickliche.

Dieses sollen nun die folgenden Aufgaben beweisen.

§. 227. Aufgabe. Ein Quadrat ABCD fig. 91 mit dem angenommenen Maasstabe auszumessen.

Auflösung. Der angenommene Maasstab sey afge, er heiße Q fig. 92, dessen Seite ae ist. AB lasse sich mit ae ausmessen; d. i.: $AB = N \times ae = AC$ (§ 109), wo N die Zahl der Maastheile in AB, wovon jeder $= ae$ ist, angiebt. Man

 mul=

mutiplizire die Maastheile der AB durch sich selbst, d. i.: man mache das Quadrat dieser Maastheile; oder $(N \times ae)^2 = N^2 \times ae^2$; so ist dieses Produkt der Inhalt.

Beweis. Die Punkte E, m, n, o, u. s. w. seyen die Endpunkte der Maastheile; dergleichen seyen auch F, s, t, v, in AC. Man ziehe mit AB Parallellinien durch F, s, u. s. w., dergleichen FH eine ist. Diese Parallellinien theilen das Quadrat in übereinstimmende und so viele Rechtecke, als AC Maastheile hat; denn alle diese Parallellinien sind auf AC senkrecht, weil es AB ist (§ 103); aber AC ist parallel mit BD; folglich giebt es Parallelogramme (§ 114) und die Stücke in BD, dergleichen BH eines ist, sind denen in AC gleich; und diese Parallelogramme haben 4 rechte Winkel (§ 112); daher decken diese Rechtecke einander ganz. Aber in jedem ist ein Maastheil = AF zur einen Seite; folglich sind N Rechtecke im zu messenden Quadrate, dergleichen AFHB eines ist.

Nach eben diesen Gründen könnte erwiesen werden, daß es dergleichen Rechtecke gebe, wenn man mit AC Parallellinien durch die Punkte E, m, n, o, zieht; dergleichen EI eine ist. Doch braucht es dieses nicht; es ist genug, hier zu wissen, daß letztere Parallellinien die erstern in den Punkten G, p, q, r, z, y schneiden (§ 99, IV).

Ich behaupte, daß die Stücke dieser letztern Parallellinien, wie sie in den erstern Rechtecken liegen (dergleichen EI, mp, nq u. s. sind), Quadrate in diesen Rechtecken bilden. Denn AFGE ist ein Rechteck (§ 112 - 114), und AF = EG =

AE

AE = FG; folglich AFGE ein Quadrat. So wird es von EGpm, u. d. f. erwiesen. Aber es sind gewiß so viele Quadrate, jedes = AFGE = Q (ich will sie Quadrat-Maastheile nennen, weil sie aefg gleich sind), in dem Rechtecke AFHB, als Maastheile in AB sind; folglich giebt es in jedem der erstern Rechtecke die nämliche Zahl Quadratmaastheile; (ich heiße die Zahl Quadrate, in einem solchen Parallelogramm, eine Reihe Quadrat-Maastheile). Der Inhalt einer Reihe ist demnach = N. Q. Man hat dann so viele Reihen Quadrat-Maastheile, als wie vielmal die Seite *ae* in einer Seite des Quadrates enthalten ist, und auch eben so viele Quadrate in einer Reihe. Die obige angegebene Multiplikation lehrt aber diese Reihen zusammen zu bringen; denn man thut darin nichts anders, als man nimmt die Quadrat-Maastheile einer Reihe so vielmal, als Reihen da sind; oder man nimmt N. Q wieder Nmal, daher erhält man N^2 Q, wo Q die Einheit der Zahl N^2 ist.

§. 228. Aufgabe. Ein Rechteck KLMP fig. 93 mit dem Maasstabe aefg fig. 92 auszumessen.

Auflösung. Man messe mit ae, wie in der vorigen Aufgabe, die Linie KL, eben so mit ae die Linie KM aus, wobei ich annehme, daß sich beide Linien mit dem angenommenen Maastheile ae ausmessen lassen.

Man multiplizire die Zahlen der Maastheile beider Linien in einander; so ist das Produkt der Inhalt der Quadrat-Maastheile, wovon aefg ein solches Quadrat-Maastheil, oder eigentlich die Einheit dieser Zahl ist.

Beweis. Parallellinien mit KL in der Weite eines Maastheiles $=$ KI $=$ ae, geben Rechtecke, und zwar so viele, als in KM Maastheile sind. Aber Parallellinien mit KM, in der Weite eines Maastheiles, bilden in den erstern, Reihen von Quadratmaastheilen, deren iede so viele enthält, als in KL Maastheile sind (beides ist im vorigen Beweise dargethan); folglich giebt die obige Multiplikation die Summe aller enthaltenen Quadrat-Maastheile.

§. 229. Zusatz. I. Daß sich die Linie AB in der 91ten und KL, KM in der 93ten Figur mit dem angenommenen ae ausmessen lassen, ist in (195.) gezeigt worden; und hier werde unter ae der kleinste Theil, oder das dortige kleinste α verstanden.

II. Gesetzt, KL sey durch das ganze ae ausmeßbar, KM aber nicht; aber KM durch $\frac{1}{p} \cdot ae = \mu$ ausmeßbar; so wird durch μ auch KL ausmeßbar seyn (§ 195).

III. Der Beweis fodert die Ausmeßbarkeit der beiden Linien des Rechteckes mit einerlei Mastheile; daher giebt dieses die Regel zu allen folgenden Ausmessungen; nämlich: beider Linien Maastheile, die man als Faktoren bei der Berechnung braucht, müßen aus einerlei Maaseinheiten bestehen.

IV. Wenn die zehntheilige Maasabtheilung (26) beobachtet wird, so enthält die Fläche 100 Quadrat-Maastheile, deren die Linie 10 hat. So ist $836''' \times 520''' = 434720''' = 43' 47'' 20'''$ Quadrat-Maastheile; oder auch so: $0,836 \times 0,520 = 0,434720$ Quadrat-Maastheile

theile von der Art, wie die Ganzen in dem Linjenmaaße genommen wurden; denn eigentlich ist ein solcher Linienmaastheil die Seite am Quadrat-Maastheile (227).

Anmerk. Wenn man sagt, der Inhalt eines Rechteckes, oder eines Quadrates komme heraus, wenn man die Grundlinie in die Höhe multiplizire; so ist dieser Ausdruck ganz ohne Sinn (Rechenk. § 56, Anmerk.); wollte man aber (nach dort) auch hier den einen Faktor als unbenannt annehmen, so ist der Ausdruck doch noch falsch, indem man so nur eine Zahl Linien-Maastheile finde; denn die Maastheile einer Linie vielmal nehmen, wird doch wohl eine Zahl solcher Maastheile geben.

Daß in den obigen Beweisen der Sinn nicht so ist, ist offenbar; denn da wurde der eine Faktor als eine Zahl Quadrat-Maastheile gebraucht, und der andere Faktor, als eine Zahl, die angab, wie vielmal diese Quadrat-Maastheile in dem ganzen Rechtecke enthalten seyen.

Solcher Ausdrücke kann man sich gleichwohl bedienen, wenn man nur den wahren Sinn versteht, aber diesen Sinn ja nicht im Ausdrucke selbst sucht.

Die Sätze (§ 194, u. f. f.), zeigen, daß Produkte aus ein Paar Linien nur Verhältnisse geben, die sich statt der Inhalte solcher Figuren brauchen lassen; aber den absoluten Sinn eines solchen Produktes zeigen sie nicht; der muß aus den obigen Beweisen hergenommen werden.

§. 230. Aufgabe. Den Inhalt I eines jeden Parallelogrammes, und II eines jeden Dreieckes zu finden.

Auflösung. I. Des Parallelogramms ABCD fig. 94 Inhalt wird gefunden, wenn man die Maastheile der Höhe CE mit denen der Grundlinie AB multiplizirt.

II. Des Dreieckes FGH fig. 96 Inhalt erhält man, wenn man der Grundlinie FG Maaßtheile in die, der Höhe HK multiplizirt, und das gefundene Produkt halb nimmt. Die Maaßtheile beider Linien werden nach (229, III) verstanden.

Beweis. Das Parallelogramm ABCD = Rechtecke ECDb (§ 162), des letztern Inhalt erhält man aber durch die vorgeschriebene Multiplikation (§ 228).

Das Dreieck ist ein halbes Parallelogramm, unter den in (§ 167, II) angegebenen Umständen. Da aber HK×GF den Inhalt des Parallelogrammes giebt, so muß nothwendig das halbe Produkt der Inhalt des Dreieckes seyn.

Wenn die Höhe des Dreieckes = h; die Grundlinie = g; beide in Zahlen der obigen Maaßtheile gegeben, so ist $\triangle = \frac{1}{2} . h . g = \frac{1}{2} h . g = h . \frac{1}{2} g$.

§. 231. Zusatz. Eine jede vielseitige Figur läßt sich durch Diagonallinien in Dreiecke theilen, und nach (230, II) der Inhalt eines jeden solchen Dreieckes finden. Die Summe der Quadratmaaßtheile aller dieser Dreiecke genommen, giebt den Inhalt der ganzen Figur.

§. 232. Zusatz. Der Inhalt eines regulären Vieleckes von n Seiten wird gefunden, wenn man das ihm gleiche Dreieck (§ 192) berechnet. Es sey die dortige FG = h. Die Länge einer Seite = a; so ist der ganze Inhalt $\frac{n}{2} . a . h = n . \frac{1}{2} a . h = n a . \frac{1}{2} h$.

§. 233.

§. 233. Die Sätze von 227 bis hieher zeigen nun, daß sich jede geradlinigte Figur mit dem Quadratmaasstabe ausmessen lasse; daher ist die Quadratfigur des Maasstabes eine schickliche.

§. 234. Lehrsatz. Die Inhalte I ähnlicher Parallelogramme, und II ähnlicher Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Linien in ihnen.

Beweis. I. Wenn das Parallelogramm ABCD fig. 94 dem abcd fig. 95 ähnlich ist; so hat man $AC:ac = AB:ab = BD:bd = DC:dc$.

Aus gleichen Winkeln C, c errichte man auf die Grundlinie, oder, wenns nöthig ist, auf deren Verlängungen die senkrechten CE, ce, so erhält man $\triangle ACE \backsim \triangle ace$; weil $\measuredangle A = \measuredangle a$, und bei E, e rechte Winkel sind (§ 205).

Daher: $AC:ac = CE:ce$ und oben war
$AC:ac = AB:ab$; folglich

$$AC^2 : ac^2 = AB \times CE : ab \times ce.$$

Die letzten Produkte geben die Inhalte der Parallelogrammen (§ 227); das erste Verhältniß ist aber auch $= AB^2 : ab^2 = CD^2 : cd^2$ u. s. w. (Rechenk. § 358).

II. In der 96ten Figur sey das $\triangle FHG \backsim \triangle fhg$ in der 97ten Figur, und aus H, h die senkrechten HK, hk; giebt $\triangle FHK \backsim \triangle fhk$; imgleichen $\triangle GHK \backsim \triangle ghk$; also wegen $\triangle FHG \backsim \triangle fhg$ hat man:

FH : fh = FG : fg; und wegen $\triangle FHK \sim \triangle fhk$ hat man

FH : fh = HK : hk; folglich

$FH^2 : fh^2 = FG \times HK : fg \times hk =$

$\frac{1}{2} FG \times HK : \frac{1}{2} fg \times hk = \triangle FGH : \triangle fgh.$

Zusatz. Man kann aus I noch dieses merken: Senkrechte Linien in ähnlichen Parallelogrammen, aus ähnlichliegenden Punkten gezogen, verhalten sich, wie ähnlichliegende Seiten dieser Parallelogramme.

235. Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten in ihnen.

Beweis. Die 84te Figur $\sim$ 85te Figur; daher AB : ab = BC : bc = CD : cd = AF : af u. s. w.; also auch $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = CF^2 : af^2$ u. s. w. (Rechenk. 358); aber $\triangle AFE \sim \triangle afe$ eben so $\triangle AEB \sim \triangle aeb$; $\triangle EBD \sim \triangle ebd$ u. s. w. (§220).

Daher hat man:

$\triangle AFE : \triangle afe = AF^2 : af^2$
$\triangle AEB : \triangle aeb = AB^2 : ab^2$
$\triangle BED : \triangle bed = ED^2 : ed^2$
$\triangle BCD : \triangle bcd = BC^2 : bc^2.$

Die letzten Verhältnisse dieser Proportionen sind alle gleich; folglich hat man:

$\triangle AFE : \triangle afe = \triangle AEB : \triangle aeb = \triangle BED : \triangle bed = \triangle BCD : \triangle bcd$; und hieraus wird

$\triangle AFE + \triangle AEB + \triangle BED + \triangle BCD :$
$\triangle afe + \triangle aeb + \triangle bed + \triangle bcd =$
$\triangle AFE : \triangle afe$ (Rechenk. § 356). Hier sind die Glieder des ersten Verhältnisses die Inhalte der ähnlichen Figuren; das zweite Verhältniß aber ist $= AF^2 : af^2$ oder $AB^2 : ab^2$ u. s. w.

§. 236. Zusatz. Daß sich ähnliche reguläre Vielecke verhalten, wie die Quadrate der Halbmesser, oder der Durchmesser der umschriebenen Kreise, erhellet aus (§ 225), weil man statt des Verhältnisses ihrer Quadratseiten die Quadrate der Halb = oder Durchmesser setzen kann.

§. 237. Aufgabe. I. Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen ähnlich; aber zwei = drei = viermal u. s. w. größer ist, als die gegebene.

II. Eine Figur zu zeichnen, die so groß ist, als zwei oder drei gegebenen ähnliche sind, und die diesen gegebenen wieder ähnlich ist.

III. Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen ähnlich, und im bestimmten Verhältnisse zu der gegebenen seyn soll.

Auflösung. I. Wenn die Figur zweimal größer seyn soll; man trage in die Schenkel eines rechten Winkels eine Seite der Figur, d. i. man mache aus der Seite der Figur ein gleichschenklicht, aber rechtwinklichtes Dreieck, und ziehe die Hypothenuse; diese ist die ähnlich liegende Seite zu der verlangten zweimal größern Figur. Diese Seite wird nun nach (§ 224, I Fall) eingetragen, und so wird die verlangte Figur erhalten.

Wenn die Figur drei = vier = oder mehrmal größer werden soll, so wird die Seite zu ihr völlig

nach

nach (177, II) gesucht; und, wie oben, die Verzeichnung bewerkstelliget.

II. Dieser Fall wird nach (177, I) hier so aufgelößt. Man nehme von jeder der beiden ähnlichen Figuren eine ähnlichliegende Seite, und setze diese beiden Seiten rechtwinklicht zusammen; so ist die Hypothenuse die ähnlich liegende Seite zu der ähnlichen Figur, die so groß ist, als die beiden, von denen die Linien genommen wurden, zusammen. Diese Hypothenuse nun wird nach oben eingetragen. Soll die zu verzeichnende Figur so groß werden, als drei gegebenen, so wird, nach dem an die erst gefundene Hypothenuse die ähnlich liegende Seite der dritten Figur rechtwinklicht aufgetragen ist, alles, wie in (§ 177, I) 1 beobachtet.

III. Dieser Fall kann entweder nach den beiden obigen, oder nach (IV in 177) verstanden, und so aufgelöset werden; oder die zu verzeichnende Figur soll sich zu der gegebenen verhalten, wie m : n. Es sey das Maas einer Seite in der gegebenen Figur = a und die gesuchte ähnlich liegende Seite zu der zu verzeichnenden heiße x; so hat man $n : m = . a^2 : x^2$ (235); daher $x^2 = \frac{m . a^2}{n}$; und

$x = a . \sqrt{\left(\frac{m.}{n}\right)}$ Die Größe dieser Seite x wird nun nach eben der Art, wie oben (I) eingetragen.

Beweis. Daß die, nach dieser Weisung entstandenen ähnliche Figuren das gefoderte Verhältniß zu einander haben, ist deswegen wahr, weil die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten dieses Verhältniß zu einander haben (§235); und dieses letzte die Verzeichnung selbst angiebt.

Von

Von der Größe des Kreises und der Kreisfläche.

§. 238. Lehrsatz. Wenn man einen Bogen halbirt, und des halben Bogens Senne zieht, so liegt I die Senne des halben Bogens näher an ihrem Bogen, als die Senne des ganzen Bogens an ihrem Bogen. II. Auch nähert sich die halbe Senne ihrem Bogen mehr der Gleichheit, als die Senne des ganzen Bogens ihrem Bogen.

Beweis. AB fig. 99 sey die Senne des ganzen Bogens ADB, der in D halbirt ist; also DB die Senne des halben Bogens. Daß nun $fg < ED$ sey, folgt aus (178, IV).

Zu II nehme ich aus (§ 8) an, daß der Bogen größer, als seine Senne sey; obschon ich den Unterschied der Größe zwischen Senne und Bogen nicht angeben kann.

Der Bogen heiße B; die Senne S, und der Unterschied x; d. i. $B - S = x$. Das geometrische Verhältniß zwischen Senne und Bogen werde so gegeben $\frac{S}{B} = m$; wo m zwar ein unbestimmter, doch aber ein wahrer Bruch ist (Rechenk. 100, II).

Nun ist $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}x$, oder Bogen BD — halber Senne $AB = \frac{1}{2}x$, und noch ist $\frac{\frac{1}{2}S}{\frac{1}{2}B} = m$.

Aber die Senne $DB > EB$ (81); setzt man also statt $\frac{1}{2}S = EB$, die Senne DB, wie sie zum Bogen DB gehört, so ist $\frac{1}{2}B - DB < \frac{1}{2}x$ (Rechenk. 337, IV); also ist auch $\frac{\text{Senne } DB}{\frac{1}{2}B} > m$;

folg-

folglich diese letzte Verhältniß der Gleichheit näher, als $\frac{\frac{1}{2}S}{\frac{1}{2}B}$. Daß aber eben so der Beweis für die Halbirung des Bogens DB, und für die folgenden Halbirungen der schon vorhandenen halben Bögen, und ihrer zugehörigen Sennen, geführt werde, ist deutlich.

§. 239. Aufgabe. Die Senne AB fig. 99. eines Bogens ADB, nebst $CD = CB$ dem Halbmesser eines Kreises sey gegeben, man soll DB, die Senne des halben Bogens finden.

Auflösung. Die Senne AB heiße S; der Halbmesser r, so ist $r^2 - \frac{1}{4}S^2 = CE^2$ (176). Es sey $CE = f$, so ist $f = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}S^2)} = \frac{\sqrt{(4r^2 - S^2)}}{2}$; und $r - f = ED$; folglich $DB^2 = ED^2 + \frac{1}{4}S^2 = (r - f)^2 + \frac{1}{4}S^2 = r^2 - 2rf + f^2 + \frac{1}{4}S^2$; aber $f^2 = r^2 - \frac{1}{4}S^2$; daher $DB^2 = r^2 - 2rf + r^2 - \frac{1}{4}S^2 + \frac{1}{4}S^2 = 2r^2 - 2rf = 2r.(r - f)$ und $DB = \sqrt{(2r.(r - f))}$.

Es ist klar, daß man von DB die Rechnung wieder anfangen könne, indem man mit DB und r eben so verfährt, wie man es mit AB und r machte; und so immer die Arbeit fortsetzen könne.

§. 240. Zusatz. $DB > \frac{1}{2}AB = EB$; denn $DB^2 = 2r^2 - 2rf$, und $(\frac{1}{2}AB)^2 = r^2 - CE^2 = r^2 - f^2$; aber $r^2 - f^2 = (r - f).(r + f)$ (Rechenk. 182, II); folglich $(\frac{1}{2}AB)^2 : DB^2 = (r - f).(r + f) : 2r.(r - f) = (r + f) : 2r$; aber $2r > (r + f)$ dieses ist der zweite Theil des Satzes (238), nur auf einem andern Wege gefunden. — Bei fortgesetzter Arbeit in (239) wird demnach

nach gefunden, daß die Senne, die zum halben Bogen gehört, immer größer sey, als die halbe Senne des ganzen Bogens.

§. 241. Zusatz. I. Die Senne DB heiße σ, der halbe Bogen ADB oder der Bogen DB $= \frac{1}{2}B = \alpha$, und nach (238) $\alpha - \sigma = \downarrow$, so wird bei jeder folgenden Halbirung $\downarrow$ kleiner; und wenn $\frac{\sigma}{\alpha} = \mu$, so wird auch dieser Verhältnißexponent μ immer kleiner. Nun wäre $\alpha = \sigma + \downarrow$, und $\frac{\sigma}{\sigma + \downarrow} = \mu$; dieser Bruch, oder dieses Verhältniß wird $= 1$, wenn $\downarrow$ unendlich abgenommen, oder unendlich klein geworden ist. Das geschieht ohne Zweifel, wenn man unendlich vielmal den Bogen halbirt habe, weil bei jeder Halbirung μ kleiner wird; aber an eine Vollendung dieser Arbeit ist gewiß nicht zu gedenken. Jedoch ist so viel begreiflich, daß man bei fortgesetzten Halbirungen endlich ein $\downarrow$ erhalte, welches kleiner ist, als eine jede angegebene Größe ϱ. Denn wenn einmal der Unterschied x war, so erhält man, bei fortgesetzten Halbirungen, Unterschiede, deren jeder noch kleiner ist, als die Glieder in dieser Reihe: $\frac{1}{2}$ x; $\frac{1}{4}$ x; $\frac{1}{8}$ x; $\frac{1}{16}$ x; u. s. w., und unter diesen kommt man gewiß auf eines, welches kleiner, als ϱ ist, so klein man auch immer ϱ angenommen hat.

II. Bei fortgesetzten Halbirungen rückt auch die Senne immer näher an den Bogen (238, I). Liegt die Senne noch um eine angebliche Größe g vom Bogen, so ist $\downarrow$ noch angeblich, oder doch wenigstens seiner Natur nach noch bestimmt. Liegt

die

die Senne dem Bogen so nahe, daß der Abstand nicht mehr angeblich, d. i. verschwunden ist (man heißt diese Lage eine unendlich nahe), so wird wohl kein Unterschied mehr statt haben; denn Senne und Bogen liegen immer in ihren Endpunkten zusammen, und nun würde dieses auch von den Zwischenpunkten gesagt werden müßen, und so würden sie sich einander decken und ψ verschwinden. Aber in diesem Zustande geht Senne und Bogen in einen Punkt zusammen (182, I). Diesem Zustande nun kann sich Senne und Bogen durch das obige fortgesetzte Halbiren nur nähern, aber erreicht wird er nicht; denn jede Halbirung giebt noch eine angebliche Größe der Senne, der Punkt aber ist kleiner, als jede angebliche Größe. Diese Betrachtung führt nun auf eben die Schlüsse, wie in (238).

III. Sieht man aber ψ schon für verschwindend an, wenn fg kleiner, als jede angegebene kleine Größe ist, ob schon fg noch nicht ganz verschwunden; nur so ist, daß seine Größe gegen den Halbmesser für nichts zu achten ist, so kann man in diesem Zustande sagen $\frac{\sigma}{\sigma+\psi} = 1$, oder es verhält sich $\sigma : \sigma + \psi = 1 : 1$, obschon dieses in der völligen Schärfe nicht wahr werden kann.

IV. So zeigt das bisher Gesagte, daß man durch fortgesetzte Halbirungen des Bogens, und jedesmaliger Berechnung der Senne (239) auf Bögen und Sennen komme, deren Unterschied so klein ist, als man will; weil man die Halbirungen so weit treiben kann, als man will.

§. 242.

§. 242. Lehrsatz. Wenn man einen Kreis in gleiche Bögen AB; BD, u. s. w. fig. 100 theilt, deren jeder kleiner, als der Halbkreis ist; und an die Theilpunkte A, B, D u. s. w. Tangenten legt, so stoßen diese Tangenten in Punkten a, b, d, zusammen, und bilden ein reguläres Vieleck.

Beweis. Auf den Halbmessern CB, CD, u. s. w. stehen ab, bd u. s. w. senkrecht (156), und stoßen daher zusammen (144). Man ziehe die Sennen AB; BD u. s. w., diese sind gleich (127); aber $\sphericalangle$ CAa = 90° = $\sphericalangle$ CBa; und im gleichschenklichten $\triangle$ ABC ist $\sphericalangle$ CAB = $\sphericalangle$ CBA; daher $\sphericalangle$ CAa − $\sphericalangle$ CAB = $\sphericalangle$ CBa − $\sphericalangle$ CBA, d. i. $\sphericalangle$ aAB = $\sphericalangle$ aBA; folglich ist $\triangle$ ABa gleichschenklicht. Aus den nämlichen Gründen ist $\triangle$ BDb gleichschenklicht; aber $\triangle$ ABa $\cong$ $\triangle$ BDb, weil $\sphericalangle$ CBD = $\sphericalangle$ CBA = $\sphericalangle$ CDB = $\sphericalangle$ CAB (138); daher dann auch $\sphericalangle$ CBa − $\sphericalangle$ CBA = $\sphericalangle$ CBb − $\sphericalangle$ CBD, d. i. $\sphericalangle$ ABa = $\sphericalangle$ DBb; und aus den nämlichen Gründen ist $\sphericalangle$ BDb = $\sphericalangle$ BAa; und die Seite AB = BD. Eben so wird nun erwiesen, daß $\triangle$ DEd $\cong$ $\triangle$ BDb; und daher nun aB = Bb = bD = Dd u. s. w.; folglich aB + bB = ab = bD + Dd = bd; aber auch die Winkel a = b = d u. s. w.; die Figur abdefgh ist daher ein reguläres Vieleck (135).

§. 243. Zusatz. Man heiße abdefghi das um den Kreis umschriebene Vieleck, so ist ABDEFGHI das eingeschriebene; beide sind ähnlich, weil sie gleichviele Seiten haben (225). Aus dem Begriffe von der Tangente folgt, daß kein Theil von ihr, sondern nur ein Punkt von ihr,

 und

und so nur ein Punkt jeder Seite des umschriebenen Vieleckes im Kreise, nicht aber innerhalb desselben, liege. Und aus dem Begriffe von der Senne folgt, daß kein Theil des eingeschriebenen Vieleckes ausserhalb des Kreises liege. Beide Vielecke aber sowohl, als der Kreis, haben die Punkte A, B, D, E u. s. w. gemein. Der Kreis fällt also (die genannten Punkte ausgenommen), der Lage nach, zwischen die Seiten beider Vielecke. Im Folgenden soll gezeigt werden, daß auch seine Länge zwischen die Länge beider Vieleckumfänge falle.

§. 244. Zusatz. I. Eine senkrechte Linie Cx auf die Mitte der Senne, oder der Seite des eingeschriebenen Vieleckes geht verlängt in den Winkelpunkt a des umschriebenen Vieleckes, und halbirt diesen Winkel; denn Cx ist auf der Mitte der AB senkrecht (128, II); also trift sie in a ein (86, IV); auch folgt aus (daselbst), daß sie den Winkel halbire.

II. Der Bogen AB wird auch von Ca halbirt (128, II).

III. Eine Linie aus dem Winkelpunkte a des umschriebenen Vieleckes in den Mittelpunkt C des Kreises halbirt den Winkel a. Denn Aa = aB; CA = CB; Ca = Ca (242); folglich △ AaC ≅ △ BaC; daher ∢ AaC = ∢ BaC.

IV. Auch der eingeschriebene Bogen AB und dessen Senne werden von dieser Ca halbirt. Denn wegen △ AaC ≅ △ BaC ist ∢ ACa = ∢ BCa; folglich Bogen Ay = Bogen By (127, II), und daher auch Ax = Bx (128, III).

V,

V. Weil aus eben den Gründen, wie in III, erwiesen wird, daß $\triangle aCB \cong \triangle BCb$, so ist $aC = bC$, oder gerade Linien aus den Winkelpunkten des umschriebenen Vielecks in den Mittelpunkt des Kreises sind gleich.

§. 245. Aufgabe. AB, BD fig. 101 sind zwo Seiten eines bekannten umschriebenen Vielecks, die zu den Bögen amb; bnd gehören; die Hälften dieser Seiten sind mB; nB; man soll aus ihnen die Seiten des umschriebenen Vielecks finden, welches zweimal so viele Seiten hat.

Auflösung. I. Durch Zeichnung. Weil Bn die halbe Seite des gegebenen Vielecks ist (242), so ziehe man BC, und errichte in b d. i., im Punkte, wo diese BC den Kreis schneidet, eine Tangente bβ, die in β die nB schneidet, so ist $\beta b = \beta n$; und βb sowohl, als βn sind die halben Seiten des Doppeltecks, oder βb bis in η verlängt, bis, wo diese Tangente die AB trift, giebt ηβ die Seite des Doppeltecks.

Beweis. Der Bogen $ab = bd$, das fodert die Eigenschaft des gegebenen Vielecks. Aber Cm, und Cn, halbiren die Bögen ab, bd, welches so erwiesen wird. Man ziehe die Senne ab; so ist Cm bei E senkrecht auf dieser Senne; denn, weil $AC = BC$ (244, V); auch $aC = bC$ (29), so hat man $AC : BC = aC : bC$ (Rechk. 350), und so ab parallel AB (202, II). Aber Cm ist senkrecht auf AB, folglich auch auf ab (103, II) und so ist nun der Bogen $am = mb = \frac{1}{2}$ Bogen ab (128, II). Eben so wird erwiesen, daß <u>$bm = md$</u> $= \frac{1}{2}$ Bogen bd sey; daher ist $mb = bn$ und $mb + bn = ab$. Daß die Tangente ηbβ so-

wohl AB, als BD schneide, ist klar, weil $\sphericalangle \beta Bb$ gewiß spitz ist, und $= \sphericalangle \nu Bb$ (244, III), und so nach (99, I). der Einschnitt in β, und ν erfolget. Nun ist $\triangle\ \beta bB \cong \triangle\ \nu bB$, weil sie bei b rechte Winkel haben; auch $\sphericalangle \beta Bb = \nu Bb$; und $Bb = Bb$ (61); daher $b\beta = b\nu$.

Nun ist auch, weil $b\beta = b\nu$; und $bC = bC$, das $\triangle\ bC\beta \cong \triangle\ bC\nu$; daher $\beta C = \nu C$; auch $\sphericalangle \nu Cb = \beta Cb$; daher Bogen $\varepsilon b = b\alpha$ (127, II). Ferner ist $\triangle\ bC\beta \cong \triangle\ nC\beta$, weil $\beta C = \beta C$; und $bC = nC$ (87), und so $\beta b = \beta n$; eben so wird erwiesen, daß $b\nu = \nu m$ sey; aber auch $\sphericalangle \beta Cb = \sphericalangle \beta Cn = \sphericalangle bC\nu = \sphericalangle \nu Cm$; und so sind nun auch die Bogen $m\varepsilon$; εb, $b\alpha$; αn gleich (127, II); folglich $\varepsilon b + b\alpha = \varepsilon\alpha = \frac{1}{2}$ Bogen mn; daher giebt es doppelt so viele, aber gleiche Tangenten, wie $\nu\beta$ eine ist, nach der Verzeichnung am Kreise; und daher ein reguläres Doppeleck außerhalb des Kreises.

II. Durch Rechnung. Der Halbmesser $Cm = r$, und die halbe Seite des Vieleckes $Bn = a$, beide sind gegeben; und da ist $CB = \sqrt{(r^2 + a^2)}$. Man halbire den Bogen bn durch $C\beta$, so ist $CB : Cn = \beta B : \beta n$ (207); folglich auch $CB + Cn : Cn = \beta B + \beta n : \beta n$, oder $\sqrt{(r^2 + a^2)} + r : r = a : \beta n$; folglich $\beta n = \frac{r.a}{\sqrt{(r^2 + a^2)} + r}$

und $2\,\beta n = \beta b + \beta n = \frac{2.r.a}{\sqrt{(r^2 + a^2)} + r} =$ der Seite des Doppeleckes.

§. 246.

§. 246. Zusatz. $\beta n < \frac{1}{2} Bn = a$; denn man zerlege $(r^2 + a^2)$ in $r^2 . (1 + \frac{a^2}{r^2})$, so ist $\sqrt{(r^2 + a^2)}$

$$= \sqrt{(r^2 . (1 + \frac{a^2}{r^2})} = r . \sqrt{(1 + \frac{a^2}{r^2})} \text{ u. } \frac{r a}{\sqrt{(r^2 + a^2)} + r}$$

$$= \frac{r . a}{r . \sqrt{(1 + \frac{a^2}{r^2})} + r} = \frac{a}{\sqrt{(1 + \frac{a^2}{r^2})} + 1}$$ Aber der Nenner ist gewiß größer, als 1; folglich ist

$$\frac{a}{\sqrt{(1 + \frac{a^2}{r^2})} + 1} < a.$$

§. 247. Zusatz. I. $C\beta < CB$; denn $CB^2 = r^2 + Bn^2 > r^2 + \beta n^2 = C\beta^2$.

II. Weil $Bb = CB - Cb = CB - C\alpha$, so ist $\alpha\beta = C\beta - C\alpha < bB$; hieraus folgt, daß das eine Ende der halben Seite des Doppelteckes, welches den Kreis nicht berührt, näher, und zwar viel näher an seinem zugehörigen Bogen liege, als ein solches Ende der halben Seite des gegebenen Vielseckes; da aber beide Seiten mit den andern Enden den Kreis berühren, so folgt, daß die Seite des Doppeltecks näher an ihrem Bogen liege, als die des erstern Vieleckes von der halben Zahl Seiten.

§. 248. Lehrsatz. Wenn Linien nach einer einzigen Gegend gebogen sind, wie a c d e f b und a g h i k l b fig. 102 und nur die Endpunkte a; b gemein haben, so ist diejenige die größte, die auf der erhobenen Seite zu äußerst liegt; d. i. die, wel-

che die andere gleichsam einschließt. In der Figur wäre aghiklb > acdefb.

Beweis. 1) Weil die Linien nur nach einer Gegend gebogen sind, so folgt, daß, wenn man aus Gegenden, die zwischen den gemeinschaftlichen Punkten beider Figuren liegen, von der umschlossenen Linie nach der umschließenden gehen will, man sich vom erhobenen Theile der erstern entfernen müße.

2) Die geraden Theile ac, cd, de u. s. w. der innern Linie werden gerade verlängt, so machen diese Verlängungen, mit den zu nächstliegenden Theilen, Winkel auf der erhobenen Seite; weil die Beugung den Nebenwinkel gegen der holen Seite macht (44); daher entfernen sich solche Verlängungen von der erhobenen Seite der innern Linie, und treffen irgend in die äußere Linie ein (1). In der Figur geschieht dies in den Punkten m, n, o, p u. s. w. Die verlängten Theile der innern Linie, bis sie zur äußern kommen, gehen nothwendig durch den, von beiden Linien eingeschlossenen Raum und bilden so geradehin Dreiecke (wie, wenn gm ein Theil der äußern Linie wäre, und agm ein solches Dreieck); oder es wird von solchen Verlängungen und Theilen der äußern und innern Linie ein mehrseitiger Raum eingeschlossen, wie aghma ist. Dieser letzte Umstand ist dem Beweise günstiger.

3) Gesetzt aghma sey ein Dreieck, so ist ag + gh + hm > am = ac + cm (54); und weil hier statt gh + hm die gerade gm gesetzt ist, so ist der Schluß um so mehr wahr, weil gh + hm > gm; d. i. weil statt gm etwas größeres gesetzt ist.

Fer-

Ferner treffe c d verlängt in n, so ist wieder wie in (3) $cm + mi + in > cd + dn$.

Nun treffe weiter d e verlängt in o, so ist $dn + nk + ko > de + eo$. Eben so treffe e f verlängt in p, so ist $eo + ol + lp > ef + fp$. Und eben so $fp + pb > fb$. Setzt man nun das, welches sich in den Vergleichungen linker Hand, und das, was sich rechter Hand befindet, zusammen, läßt aber cm, dn, eo, f p weg, weil sie sich in beiden Summen befinden, so erhält man $ag + gh + hm + mi + in + nk + ko + ol + lp + ph > ac + cd + de + ef + fb$.

§. 249. Zusatz. Daß der obige Beweis weder bei der umschließenden, noch umschlossenen Linie eine bestimmte Zahl Seiten fodere, ist klar. Der einfachste Fall ist der in (88), wenn dort A D B die umschlossene, und A C B die umschließende Linie wäre.

§. 250. Zusatz. Wäre die umschlossene Linie ein zusammenhängender Bogen von einerlei Krümmung, etwa ein Kreisbogen, so läßt sich die Sache, daß auch noch der Beweis anpassend sey, so begreifen: Theilt man einen solchen Kreisbogen in unendlich viele Bögen nach der Art (241, II), so werden diese Bögen unendlich klein, und sind von solchen geraden Linien nicht mehr verschieden; die geraden Verlängungen dieser Bögen werden zu Tangenten (182, II). Nicht aber, wegen diesem letzten Umstande, sondern deswegen paßt der Beweis, weil die Verlängungen der unendlich kleinen Bögen des umschlossenen Bogens durchaus gerade sind, und solche in den umschließenden Bogen eintreffen, wo man sich dann in dem umschließen=

 den,

den Sennen zu den Punkten, welche von den verlängten Tangenten des innern Bogens getroffen wurden, gezogen, denken kann; und der Beweis sofort, wenn man die Bögen statt der Sennen setzt, um so mehr wahr ist. Würden aber bei der umschließenden Linie immer Winkellinien statt der Bögen angenommen; so bleibt der Satz auch noch immer wahr.

Exempel. Der Bogen $BFD < BAD$, fig. 54.

§. 251. Zusatz. Wegen (250) ist man berechtigt anzunehmen, daß der Bogen kleiner sey, als die ihm zugehörige Seite des umschriebenen regulären Vieleckes; oder es ist in der 101ten Figur, der Bogen $mn < mB + Bn$; oder, weil der Bogen $ab = mn$, und $mB + Bn = AB$; so ist Bogen $ab < AB$.

§. 252. Zusatz. Wegen (246) ist $b\beta + \beta n < Bn$; aber der zu $b\beta + \beta n = \beta\delta$ zugehörige Bogen $bn = \frac{1}{2} mn$ bleibt als halber Bogen in der Größe, die dem halben Bogen zukömmt. Heißt nun hier der Unterschied u, der zwischen dem Bogen bd und der zugehörigen äußern Seite BD ist, so ist zwischen dem halben Bogen bn, und seiner zugehörigen Seite $b\beta + \beta n$ der Unterschied etwas kleiner, als $\frac{1}{2} u$, und bei fortgesetzten Halbirungen wird dieser Unterschied immer kleiner, nicht nur für sich, sondern im Verhältnisse zum Bogen; daher können auch hier alle Schlüsse in (§ 241) wieder angebracht werden.

§. 253. Zusatz. Folglich ist der Bogen größer, als die Senne; d. i., als die Seite des eingeschriebenen regulären Vieleckes; aber kleiner, als

als die Seite des umschriebenen gleichvielseitigen Vieleckes (251); seine Größe fällt also zwischen die genannten Seiten.

§. 254. Exempel zu (239) und (245), welches (253) erläutert.

I. Die Seite des eingeschriebenen regulären Sechseckes ist dem Halbmesser gleich (142). Der Halbmesser $= 1$ gesetzt, giebt nach (239) das dortige $f = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; und die Seite des Zwölfeckes $= \sqrt{(2 - 2.\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$

Aber $\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772\ldots$ wofür man setzen kann $1{,}73205080756888773$; also $2 - 1{,}73205080756888773 = 0{,}26794919243112227$; und hieraus die Quadratwurzel $= 0{,}5176380\ldots$; wofür man $0{,}5176381$ setzen kann; weil die folgende achte Stelle bei fortgesetzter Arbeit eine 9 seyn würde.

II. Die Seite des umschriebenen Sechseckes wurde so gefunden.

In der 99ten Figur sey AB die Seite des innern Sechseckes; KL des äußern; KL parallel AB; weil beide auf CD senkrecht sind; folglich $\triangle KLC \backsim \triangle ABC$; und $CE : CD = CA : CK$ (204); aber auch $CA : CK = AB : KL$; daher $CE : CD = AB : KL$; d. h. $f : 1 = 1 : KL$; also

$$KL = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \tfrac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 1{,}1547005368452994\overline{6}2 \ldots = 2a\ (\S\ 245).$$

Die Seite des innern 12eckes ist $= \dfrac{2 . a . r}{\sqrt{(r^2 + a^2)} + r}$

 =

$$= \frac{1,15470053684529946 2..}{2,1547005371....} = 0,535944794..$$

wenn $r = 1$, gesetzt wird; diese ist nun gewiß grösser als die Seite des innern Zwölfeckes; wie man das leicht aus beider Vergleichung sieht. Wollte man beider Vielecke Seiten zugleich berechnen, so wäre rathsam, das innere allemal zuerst zu berechnen; und aus der Seite des innern Vieleckes, die des äußern Vieleckes, welches jenem ähnlich ist, zu finden; denn letztere ist jedesmal $\frac{1}{f}$, wenn der Halbmesser, oder $r = 1$; sonst $\frac{r^2}{f}$; wo man f allemal bei Berechnung des innern Vieleckes haben mußte.

III. Die Seite des regulären Viereckes ist $= \sqrt{2r^2}$, und so ist sie $= \sqrt{2}$ wenn $r = 1$, gesetzt wird; denn in fig. 103 sind die Durchmesser AB, DE senkrecht auf einander; daher ist der Bogen DB = BE = EA = AD und die Senne DB die Seite im regulären Vierecke. Sie heiße s, wie in (239), so wird CF = f gesucht, woraus sich die Senne DG, als Seite zum regulären Achtecke finden läßt, und aus der bekannten Seite des Achteckes kann man die des Sechszehneckes, und aus dieser die des 32eckes u. s. w. finden; wenn man nämlich mit Paaren so auf einander folgenden Seiten im Rechnen so verfährt, wie mit der des Vier- und des Achteckes verfahren wurde, und immer so die Arbeit wiederholt.

IV. Die Algebra lehrt, daß für den Halbmesser = 1 die Seite des innern Fünfeckes sey =

$\surd$

$\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}$; woraus sich, nach eben der Weise die des Zehneckes, dann des 20eckes, ferner die des 40eckes u. s. w. finden läßt.

Man sieht jedoch, daß die Fortsetzung der Arbeit bei diesen Berechnungen sehr beschwerlich werde, weil man in jeder Rechnung zu einer Seite zum wenigsten zweimal die Quadratwurzel ausziehen muß, und dann, wenn man große Genauigkeit sucht, dieses bis auf sehr viele, und zwar in den ersten Arbeiten bis wohl auf hundert und noch mehr Dezimalstellen verrichten müße.

§. 255. Zusatz. I. Die sechs Seiten des regulären Sechseckes sind $= 6 . r$, oder, wenn $r = 1$ (*) gesetzt wird, $= 6$; aber die 6 zugehörigen Bögen sind größer, und zwar zusammen um sechsmal den Unterschied zwischen einer Senne und Bogen; folglich ist der ganze Kreis sechsmal, und noch um ein Stück des Halbmessers größer, als der Halbmesser!

II. Die sechs Seiten des umschriebenen Sechseckes sind größer, als die zugehörigen Bögen (253), und, da eine Seite $= 1,1547 \ldots$ so sind sie alle sechs $= 6,9282 \ldots$, folglich ist der Kreis größer, als 6 Halbmesser, und kleiner, als $6,9282 \ldots$ Halbmesser, also fällt die Größe des Kreises zwischen diese zwo Zahlen, deren Einheit der Halbmesser ist (253). Aber aus (241) und (252) wird es deutlich, daß, wenn man die Seiten der Doppelt-

(*) $r = 1$ setzen, heißt: den Halbmesser als Masstab brauchen, wie dieses nach (24) erlaubt ist. Aber auch oft wird der Durchmesser zur Einheit angenommen, welches eben so verstattet ist.

pelteke nimmt, sich diese immer dem Bogen in Lage und Gleichheit nähern. Oder bei fortgesetzten Berechnungen der Seiten zu folgenden Doppeltecken wird der Unterschied zwischen ihnen, und zwischen ihnen und dem zugehörigen Bogen immer kleiner.

III. Die Seite des innern Zwölfeckes ist = 0,5176381 (254, I), und es ist 12×0,5176381 = 6,2116572 < als der Kreis.

IV. Die Seite des äußern Zwölfeckes ist = 0,535898403.... und 12 × 0,5358984.. = 6,4307808.... größer als der Kreis.

V. Ich setze noch einige Zahlen von folgenden Doppeltecken hieher, und werde sogleich anzeigen, woher ich sie genommen habe.

Des innern Vierundzwanzigeckes Seite ist =0,26105238.... und alle Seiten = 24×0,26105238=6,26525712...., welche Zahl kleiner, als der Kreis ist.

VI. Der Umfang des äußern 24eckes ist = 6,31931988.... größer, als der Kreis.

VII. Der ganze Umfang des innern 48eckes =6,27874464.... kleiner als der Kreis.

VIII. Der ganze Umfang des äußern 48eckes =6,29217272.... größer, als der Kreis.

IX. Der Umfang des innern 96eckes ist = 6,2821464.... kleiner als der Kreis.

X. Der Umfang des äußern 96eckes ist = 6,28547358.... größer, als der Kreis.

§. 256.

§. 256. **Anmerk.** Die obigen Zahlen stehen in einer Abhandlung, die ich als **Erläuterung über die Verhältniß des Kreises zum Durchmesser** 1786 habe drucken lassen. Wenn man sich weiter über die Bemühungen belehren will, die man in vorigen Zeiten auf die nähere Bestimmung dieses Verhältnisses verwendet hat, so findet man in der gedachten Abhandlung, wie ich glaube, hinlängliche Nachrichten.

Archimed setzte den Kreis $3\frac{1}{7}$mal größer, als den Durchmesser, aber so groß ist der Kreis im Verhältnisse des Durchmessers nicht; aber den Kreis $3\frac{10}{71}$mal größer, als der Durchmesser, angenommen, giebt ihn etwas zu klein; folglich fällt seine wahre Größe zwischen beide Zahlen.

Ludolph van Ceulen bringt die verhältnißmäßige Größe des Kreises zwischen weit engere Grenze. Seine äußerst mühsam geführte Rechnungen findet man in der oben angeführten Abhandlung erzählt. **Ludolph** fand, daß, wenn der Kreis 3,14159265358979323846264338327950 Theile des Durchmessers gesetzt werde, diese Zahl ihn um etwas zu klein gebe; aber die nämliche Zahl gebraucht, und statt 50 (welche die letzten zwo Stellen sind) 51 gesetzt, giebt ihn schon zu groß; also die erste Zahl gebraucht, giebt den Kreis noch nicht völlig um ein Zehnsextilliontheilchen des Durchmessers zu klein.

Ludolph fand die obige Zahl nicht auf einem einzigen Wege; etwa bei Vergleichung der Vielecke, deren Zahlseiten sind, wie 1.6; 2.6; 4.6; 8.6; u.s.w.; sondern er nahm auch Vielecke, der Zahl Seiten so folgten 1.4; 2.4; 4.4; 8.4; 16.4; u.s.w. Auch von den Vielecken 1.5; 2.5; 4.5; 8.5; 16.5; u.s.w.; nach §.254, III und IV.).

Man pflegt bei kleinen Kreisen, bei denen ein Hunderttheilchen des Durchmessers schon sehr klein ist, nur die drei ersten Ziffern in der Anwendung zu brauchen; doch darf dieses ja nicht eine Regel seyn; man muß überhaupt Rücksicht auf die absolute Größe des Durchmes-

messers nehmen, um zu erkennen, biß in welche Dezimalstelle man die Reihe nehmen müße, bis man folgende Dezimaltheile für verschwindend halten könne.

§. 257. **Lehrsatz.** **Alle Kreisflächen sind ähnlich.**

Beweis. Wenn man die Bögen der Kreise unendlich klein annimmt, (wie sich das allemal denken läßt) so sind die Bögen von ihren Sennen nicht mehr verschieden, und so werden die Kreisflächen Unendlichecke; daher Vielecke von gleichvielen Seiten, weil wohl hier die Zahl der Seiten bey allen gleich ist; sie sind demnach ähnlich (219).

§. 258. Zusatz. Daher haben alle Durchmesser zu ihren Kreisen das nämliche Verhältniß.

§. 259. Zusatz. I. Man heiße P die Zahl 3,1415 ... oben in (256); den Durchmesser $= 1$ angenommen, so läßt sich eines jeden andern Kreises Länge finden, dessen Durchmesser in einer andern Zahl, als 1, gegeben ist. Es sey d der gegebene Durchmesser eines andern Kreises, so wird dessen Länge $= p$ so gefunden; $1 : P = d : p$. Oder $p = P . d$. Wäre p gegeben, und man suchte d; so setzte man; $P : 1 = p : d$; oder $d = \frac{P.}{P} = p . \frac{1}{P.}$ Zahlen lassen sich leicht statt dieser Buchstaben setzen.

II. Gewöhnlich wird der Halbmesser $= 1$ gesetzt; und dann ist P die Länge des halben Kreises; und $2 . P$ der ganze Kreis; aber in diesem Falle sind die Dezimaltheile in P Theile des Halbmessers.

Exempel. Den Kreis zu suchen, dessen Durchmesser 24' ist. Hier kann man wohl Zehntau-

tausendtheile für verschwindend annehmen, daher $1 : 3,141 = 24' : p$, oder $p = 24' \times 3,141 = 75,384$; und wenn hier die Ganzen, Ruthen sind, so ist diese Zahl Zehntheile der Ruthe (Fuß); und daher läßt sich die Zahl durch $75384''''$ (26) angeben.

Umgekehrt; aus der gebenen Länge des Kreises $75384''''$ die des Durchmessers zu finden, setzt man $3,141 : 1 = 75384'''' : d$ und $d = \frac{75384''''}{3,141} = 24000''''$ oder $= 24'$. Wären oben, statt Fuß, Meilen gegeben, so würde man wohl weiter, als bis auf Zehntausendtheile; und wenn man überlegt, daß der zehntausendste Theil einer Meile noch etwas mehr, als 2 Fuß ist, wohl bis zu Hunderttausendtheilen, und vielleicht noch weiter, p suchen müßen.

§. 260. Lehrsatz. Die Zirkelfläche ist einem Dreiecke gleich, dessen Grundseite der Kreis, die Höhe aber der Halbmesser ist.

Erster Beweis. Wenn die Sennen unendlich klein angenommen werden, so, daß aus dem Zirkel ein reguläres Unendlicheck wird, so liegen die Sennen in ihren Bögen (179, I) und die Summe aller dieser Sennen, ist der Summe der zugehörigen Bögen gleich; die letzte Summe aber macht den Kreis aus. Daß aber dieses Unendlicheck von der Kreisfläche nicht mehr kann verschieden seyn, begreift man daher, weil beide einander decken werden. Aber in diesem Falle ist die senkrechte Linie aus dem Mittelpunkte auf so eine unendlich kleine Senne dem Halbmesser gleich (179).

Nimmt man so in der Kreisfläche unzählig viele Dreiecke an (wie das nach (193) verstattet ist), derer Grundseite eine unendlich kleine Senne eigentlich ein so kleiner Bogen ist, so ist die Höhe eines solchen Dreieckes der Halbmesser, und die Kreisfläche dem, im Satze genannten Dreiecke gleich (192).

Zweiter Beweis. Das Dreieck sey größer, als die Kreisfläche, so das $C + D = T$, wo der Inhalt des $\triangle = T$, der des Kreises $= C$ und D die Differenz sey. Man beschreibe um den Kreis ein reguläres Vieleck, und weil man dessen Seiten so klein nehmen, und folglich so nahe an den Kreis bringen kann, als man will (241; 252), so ist zwar dieses Vieleck größer, als die Kreisfläche, weil es seine Grenze über die des Kreises ausdehnt; allein es heiße die Fläche des Vieleckes $= V$; so, daß $C + E = V$ sey, so kann man E so sehr durch wiederholte Doppelecke vermindern, als man will, und so wird gewiß $E < D$ werden; und $C + D > C + E$ werden, oder $T > V$; aber das Dreieck, das nach (192) dem V gleich wird, hat den Umfang des regulären Vieleckes zur Grundseite, und den Halbmesser des Kreises zur Höhe (weil der Halbmesser des Kreises auf der Seite des umschriebenen Vieleckes jedesmal senkrecht steht, wie das bei dem Dreiecke (192) gefodert wird). Folglich ist das Dreieck aus V größer, als T, weil es die nämliche Höhe, aber eine größere Grundseite hat; aber bei der Annahme, daß $T > C$ sey, wurde erwiesen, daß $T > V$ sey, welches aber, wegen dem eben Angeführten nicht seyn kann; folglich kann T nicht größer, als C seyn.

in=

Es sey $T < C$; so, daß $T + d = C$. Man beschreibe ein inneres Vieleck, dessen Fläche $= v$ ist, es ist auch, da die Kreisfläche sich weiter, als das innere Vieleck ausdehnt, kleiner, als die Kreisfläche, und sey $v + e = C$, so wird wie oben durch fortgesetzte Annahme von innern Doppelecken, sich e immer vermindern, weil die Grenze des innern Vieleckes immer näher an den Kreis, d. i., näher an die Grenze der Kreisfläche kömmt.

In diesem Zustande wird $e < d$ seyn; aber $T + d = C = v + e$; folglich $T < v$ (Rechenk. 337, IV, 2). Aber das Dreieck nach (192), welches $= v$ ist, hat zur Grundseite den Umfang des v; und dieser Umfang ist kleiner, als der Kreis (§ 241); auch die Höhe des Dreieckes, welches $= v$ ist, ist noch etwas kleiner, als der Halbmesser; folglich ist es unmöglich, das $T < v$ werde; diese Unmöglichkeit aber würde folgen, wenn angenommen wird $T < C$; folglich ist T nicht kleiner, als C; und da erst erwiesen, daß auch T nicht größer, als C ist; so ist $T = C$.

§. 261. Zusatz. Folglich ist der Ausschnitt C A D B C fig. 99 einem Dreiecke gleich, dessen Grundseite der Bogen A D B und die Höhe der Halbmesser ist (193, III); dieses folgt sowohl aus den Schlüssen des ersten, als aus denen des zweiten Beweises.

§. 262. Zusatz. I. Der Inhalt des Zirkels heiße C. Weil $p = P \cdot d$ (259), so ist $C = \frac{P \cdot d^2}{4} = \frac{p\,d}{4}$ (230, II) $= \frac{1}{2} r \cdot p$; weil $r = \frac{1}{2} d$ ist; aber weil auch $p = 2 r \cdot P$, so ist $\frac{1}{2} r \cdot p = \frac{1}{2} r \cdot 2 r \cdot P = r^2 \cdot P$.

II. Man hat aus (I) $\frac{4\,C}{p} = d^2$; daher $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{C}{p}}$. Dieses letzte lehrt den Durchmesser aus dem Inhalte unmittelbar finden. Man kann hierbei $\frac{1}{p} = 0{,}31830988618379067153..$ brauche, weil $\frac{C}{p} = C \cdot \frac{1}{p}$ ist.

III. Ist p bekannt, so kann man statt d nach (259), setzen $p \cdot \frac{1}{p}$; also $\frac{p.d}{4} = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{1}{p} = C$, dieses giebt den Inhalt durch den Kreis allein ausgedruckt; die zweite Formel in (I) fodert aber, daß der Kreis und Durchmesser bekannt sind. Und die dritte Formel in (I) giebt den Inhalt durch den Halb- oder Durchmesser allein ausgedruckt.

§. 263. Zusatz. Der Bogen, der als Grundseite beim Ausschnitte (261) gebraucht wird, heiße $= a$; so ist des Ausschnitts Inhalt $= \frac{a\,d}{4}$. Diesen Bogen findet man durch Rechnung, wenn man die Größe des Winkels ACB weis, folgender Weise: Es sey $\measuredangle$ ACB = n Grade; so ist $360^\circ : n^\circ = p : a$ (42); denn es ist der Bogen ein Stück des Kreises, welches sich zum ganzen Kreise verhält, wie sich n Grade zu 360 Graden verhalten.

Exempel. ACB $= 72^\circ$; der Halbmesser AC $= 54'$ und der Durchmesser $= 2.54' = 108'$, so ist $1 : 108' = 3{,}141\ldots : p$, und $p = 339'228 = 339228''''$; daher nun $360 : 72 = 339228'''' : a$

: a oder a = $\frac{339228}{5}$ = $\overset{v}{678456}$; daher der Ausschnitt = $(\overset{v}{678456} \times \overset{v}{540000}) : 2 = 18621\ \overset{v}{120000}$ Quadratmaßtheile der Länge von der Vten Abtheilung (229, III), = 1,862112 = 1° 86′ 21″ 12‴.
Wäre ACB ausser, den ganzen Graden, noch auch in Minuten oder Sekunden gegeben, so ist bekannt (Rechenk. 119, II), daß man die zwei ersten Glieder in der zweiten Proportion gleichartig machen müße; z. B. ACB = 72 + 40″ + 3′ = 72.60.60 + 40.60 + 3; und das erste Verhältniß in der obigen zweiten Proportion müßte seyn 360.60.60 : 72.60.60 + 40.60 + 3.

§. 264. Zusatz. Der Inhalt des Abschnittes ADBEA wird gefunden, wenn man den Inhalt des Ausschnittes zuerst sucht, und dann den Inhalt des Dreieckes ABC davon abzieht.

Wenn daher der Abschnitt in Rechnung gegeben wäre: so suche man zuerst seinen Mittelpunkt und Halbmesser nach (212, III) und den Winkel C (42); und so kann man, weil die erfoderlichen Dinge nun bekannt sind, die Berechnung ausführen.

Exempel. Es sey in dem Ausschnitte (263) alles noch, wie es in der Rechnung angenommen ward; nur zu dieser Absicht noch weiter entweder die Senne AB, oder die Höhe des Bogens gegeben; denn wenn AB bekannt ist, so ist $\sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4}AB^2)} = EC$; und $EC \times \frac{1}{2}AB$ = Inhalte des △ ABC; oder wenn ED bekannt ist; so ist $AD - ED = EC$ und $\frac{1}{2}AB = \sqrt{(AC^2 - EC^2)}$, woraus man eben so, wie oben, den Inhalt

halt des Dreieckes findet; und so ist Ausschnitt ACBDA — △ ABC = Abschnitt ADBEA.

§. 265. Lehrsatz. Die Zirkelflächen verhalten sich, wie die Quadrate der Durch- oder Halbmesser, oder wie die Quadrate ihrer Kreise.

Beweis. D; d, seyen die Durchmesser von ein Paar Zirkelflächen C; c, so ist $C = \frac{P.D^2}{4}$ und $c = \frac{P.d^2}{4}$ (262); folglich $C : c = \frac{P}{4}.D^2 : \frac{P}{4}.D^2 = D^2 : d^2$; aber wenn die Kreise K; k sind, so ist auch $D^2 : d^2 = K^2 : k^2$; aber auch ist $D^2 : d^2 = R^2 : r^2$, wenn R und r die Halbmesser sind. Der Satz ist auch wegen (257) als Zusatz zu (246), wahr.

§. 266. Zusatz. Hat man daher irgend eine Zirkelfläche berechnet, deren Durchmesser auch bekannt ist; so kann man eine jede andere Zirkelfläche, deren Durchmesser auch bekannt ist, finden. So ist die Fläche des Zirkels dessen Durchmesser = 1 (dieses 1 kann zwar verschiedene Maseinheiten bedeuten, man muß aber wegen (256) die gehörige Behutsamkeit in der Anwendung beobachten) = $3,141592 \ldots \times \frac{1}{4} = 0,785398 \ldots$ Quadratmastheile, wovon der Durchmesser die Linie ist.

Man setze eines andern Zirkels Durchmesser sey = d; so wird sein Inhalt = c so gefunden $1 : d^2 = 0,785398 \ldots : c$; oder $c = d^2 . 0,785 \ldots$

Exempel. Eines Zirkels Durchmesser sey 4 Meilen, oder d = 4 Meilen; so ist dessen Inhalt = $16 . 0,785398 \ldots = 12,566368 \ldots$ Quadratmeilen.

§. 267.

§. 267. Zusatz. I. Der Ring zweier konzentrischer Kreise fig. 8, der den kleinen Kreis zur innern, und den großen Kreis zur äußern Grenze hat, findet sich so: Des großen Kreises Halbmesser sey $= R$, des kleinen $= r$; so ist der Flächeninhalt des ersten $= R^2 . P$; und des zweiten $= r^2 P$ (262, I), und den zweiten vom ersten abgezogen, läßt offenbar den Ring übrig; daher $R^2 . P - r^2 . P = (R^2 - r^2) . P =$ dem Ringe. Das Stück bBEe des Ringes verhält sich offenbar zum ganzen Ringe, wie der Bogen BE : 360°; woher sich demnach, wenn BE in Graden bekannt ist, und man auch den ganzen Ring berechnet hat, das Stück finden läßt.

II, Der Ring verhält sich zum kleinen Kreise $= (R^2 - r^2) . P : r^2 . P = R^2 - r^2 : r^2$; und zum großen Kreise, wie $R^2 - r^2 : R^2$.

§. 268 Zusatz. I. Wenn man mit den drei Seiten eines rechtwinklichten Drieckes Zirkel beschreibt, bei denen entweder diese Seiten die Halb- oder die Durchmesser sind; so ist die Zirkelfläche der Hypothenuse so groß, als die der beiden Katheten zusammengenommen (235).

II. Uiberhaupt läßt sich (237) hier ganz anbringen, wenn man hier mit den Halb- oder Durchmessern so verfährt, wie mit den ähnlich liegenden Seiten dort.

§. 269. Lehrsatz. Das Quadrat adbe fig. 103, welches um den Kreis beschrieben ist, ist zweimal so groß, als das Quadrat ADBE, welches im Kreise beschrieben ist.

Beweis. Weil CDB ein gleichschenklichtes Dreieck ist, auch DB und db auf CG senkrecht sind, so ist DB parallel db (100); folglich auch $\triangle$ Cdb gleichschenklicht. Aber $dCG = 45^\circ$ (§. 86 und 106) $= CdG$; daher $CG = dG$ (§ 62); also $dG + Gb = 2.dG = db = 2\,CG = AB$. Aber $AB^2 = AD^2 + DB^2$ (175) $= 2\,AD^2$.

§. 270. Lehrsatz. Die vier Seiten eines Quadrates seyen so lang, als ein gewisser Kreis $= p$; so ist die Fläche dieses Quadrates kleiner, als die Fläche des Kreises.

Beweis. Der Inhalt des Quadrates sey $= Q$; so ist $Q = \frac{1}{16} p^2$; aber der Inhalt des Kreises $= C = \frac{1}{4} pd$; folglich $Q : C = \frac{1}{16} p^2 : \frac{1}{4} pd = \frac{1}{4} p : d$; aber $\frac{1}{4} p < d$ (255).

§. 271. Zusatz. Die sechs Seiten eines regulären Sechseckes seyen $= p$; so ist der Inhalt $= \frac{1}{2} p \times \frac{1}{12} p . \sqrt{3}$. Denn es sey die 46 Figur ein reguläres Sechseck; so ist die in (192) genannte senkrechte Linie, oder $FG = \sqrt{(FB^2 - GB^2)}$; aber $GB = \frac{1}{2} FB$ (142), daher $FG = \sqrt{(FB^2 - \frac{1}{4} FB^2)} = \sqrt{(\frac{1}{36} p^2 - \frac{1}{144} p^2)} = \sqrt{\frac{3}{144} p^2} = \frac{1}{12} p . \sqrt{3}$; folglich der Inhalt des Sechseckes $= S = \frac{1}{2} p \times \frac{1}{12} p . \sqrt{3} = \frac{1}{24} p^2 . \sqrt{3}$, und $S : C = \frac{1}{24} p^2 . \sqrt{3} : \frac{1}{4} pd = p . \sqrt{3} : 6d = 3p : 6d . \sqrt{3} = p : 2 . d . \sqrt{3}$. Ich nehme $\sqrt{3} = 1{,}73$ noch zu klein (254), so ist das Verhältniß $p : 3{,}46 . d$; aber $p < 3{,}46 . d$, folglich ist der Inhalt des Sechseckes, das mit dem Zirkel einerlei Umfang hat, kleiner, als des Zirkels Inhalt.

§. 272. Zusatz. Der Inhalt des Quadrates in (270) $= \frac{1}{16} p^2$, folglich $S : Q = \frac{1}{24} p^2 . \sqrt{3}$:

$: \frac{1}{16} p^2 = 4 \cdot \sqrt{3} : 6 = 4 \cdot 1{,}73 : 6 = 6{,}92 : 6$; daher das reguläre Sechseck größer, als das Quadrat, deren beide Umfänge jedoch gleich sind.

§. 273. Anmerk. Das allgemeine Gesetz, daß nämlich unter regulären Vielecken von gleichem Umfange dasjenige den größten Raum einschließt, welches die meisten Seiten hat; und folglich der Zirkel unter diesen Umständen den größten Raum begrenze; ferner, daß die reguläre Figur, wenn sie mit der irregulären gleichen Umfang hat; doch allemal diese am Inhalte übertreffe, hier gründlich darzustellen, würde mich zu weit führen; so wichtig auch die Anwendung davon ist. Will man eine Fläche mit einer Mauer oder Graben umgeben, und die Umstände erlauben es, die Figur der Fläche, nicht aber ihre Größe, willkürlich zu nehmen; so kann man wohl mehr als die Hälfte an Mauer und Graben ersparen, wenn man die reguläre statt der irregulären Figur wählt. Bei Grundlagen zu Gebäuden wird diese Beobachtung noch weit nützlicher. Das Gesetze ist sogar, daß, wie sich die Figur immer mehr der regulären nähert, ihr Inhalt vom nämlichen Umfange immer größer werde. Nähern Unterricht findet man in Clavii Geometria practica lib. VII., und bei Joh. de Sacrobosco, comment. in Sphær. cap. I.

Anwendung der bisherigen Lehre zu Messungen auf der Erde.

§. 274. Erklärung. I. Eine ebene Fläche heißt horizontalliegend, wenn sie mit stillstehendem Wasser überall gleiche Entfernung hat; da-

her heißt sie auch in dieser Lage: wasserwagrecht. Eine gerade Linie in dieser Lage, d. h., in solcher, daß sie in die Horizontalebene falle, heißt: Horizontallinie. Der Name kömmt vom Worte Horizont (Gesichtsgrenze) her, weil eine solche Fläche, oder das genannte stehende Wasser nach allen Seiten verlängt, den sichtbaren Theil des Himmels von dem unsichtbaren abschneidet, und also die Grenze beider Theile des Himmels für den Beobachter angiebt, der sich auf dieser erweiterten Ebene befindet. Freilich ist auch die glatteste Oberfläche des stillstehenden Wassers keine vollkommene Ebene, weil es ein Stück von der Oberfläche unserer Erdkugel ausmacht; allein, bei kleinen solchen Wasserflächen ist der Fehler, wenn man solche als Ebenen annimmt, sehr geringe; und da denkt man sich dann eine solche kleine Erdoberfläche in eine Ebene nach allen Gegenden erweitert.

II. Eine Linie heißt vertikal, wenn sie auf der Horizontalfläche senkrecht ist. Ein Faden, an dessen unterm Ende ein Gewicht hängt, spannt sich nach der Vertikallinie, wovon jedoch hier die Ursache nicht wohl angegeben werden kann.

III. Eine Ebene an dem Faden in (I) gelegt, so, daß der vertikale Faden ganz in dieser Ebene liegt, heißt eine Vertikalebene.

IV. Gerade Linien liegen vertikal übereinander, wenn sie alle in eine einzige Vertikalebene fallen. In dieser Lage nun können sie auch noch alle horizontal seyn.

Anmerk. Wenn in den eben gegebenen Erklärungen nicht volle Deutlich- und Gründlichkeit herrscht; so ist dieses auf Rechnung der hier unterbrochenen Me-

Methode zu schreiben. In dem folgenden Abschnitte von der Lage der Ebenen wird zwar noch einiges, aber nicht alles erläutert. Es gehören nämlich weit mehr Vorkenntnisse zur praktischen Feldmeßkunst, als die vorher gegangene Theorie; allein, Anfänger haben gewöhnlich nicht Geduld genug, es abzuwarten, bis sie solche Lehren inne haben, die ihnen von allen den Begriffen, die bei dem Feldmessen vorkommen, sichere Gründe angeben.

Wie mag's erst den Prakticis gehen, die nicht einmal die Kenntnisse haben, die im Vorhergehenden abgehandelt wurden? und doch enthalten diese Kenntnisse bei weitem das Meiste, worauf man sich in der Ausübung gründet.

§. 275. Bei dem sogenannten Feldmessen werden verschiedene Werkzeuge erfodert, die, nachdem man sich verschiedener Arten zu messen bedient, auch so verschieden seyn müßen. Die gewöhnlichsten sind: die Meßstange, statt deren man sich aber besser einer Meßkette bedient. Der Winkelmesser (astrolabium) und das Meßtischchen, oder die Meßscheibe. Beschreibungen davon, auch mit Zeichnungen, würden doch noch lange die Deutlichkeit nicht geben, als wirkliche Vorzeigung dieser Dinge selbst.

I. Die Meßkette wird gebraucht, gerade Linien auf der Erde zu messen, deren Lage durch wenigstens ein Paar vertikal eingesteckte Stäbe angegeben ist; zu beobachten ist, daß dergleichen Stange oder Kette ein gewisses bestimmtes Maas, und richtig abgetheilte zehntheilige Maastheile enthalte. Beim Messen selbst wird dieses Instrument so oft hintereinander in die zu messende Linie gelegt, als es erfoderlich ist, wobei man darauf sieht, daß es gerade eingelegt wird; daher sich die Kette nicht nach

vorhandenen Dellen und Erhabenheiten, die häufig auf der Erde vorkommen, beugen darf.

II. Der Winkelmesser, wovon (42) Erwähnung geschehen, wird zu Messung der Winkel, die auf der Oberfläche der Erde ihre Schenkel haben, so eingerichtet, daß man ihn auf ein Fußgestell ganz horizonthal und so stellt, daß des Winkelmessers Mittelpunkt vertikal über der Spitze des zu messenden Winkels komme.

Ein im Mittelpunkte des Instrumentes bewegliches Lineal, welches an beiden Enden mit aufgerichteten kleinen Plättchen, die entweder einen vertikalen Riß, oder ein Löchlein haben, versehen ist, wird so herumgedreht, bis man durch diesen Riß, oder Löcher wahrnimmt, daß dieses Lineal vertikal über dem Schenkel des zu messenden Winkels liege, und dieses Drehen nun fortgesetzt bis zum andern Schenkel des Winkels, giebt den Gradebogen auf dem Instrumente, der zwischen den Schenkeln des Winkels statt hat, und den man sich zum fernern Gebrauche aufschreibt. Ich rathe jedoch nicht, dieses Instrument bei blos geometrischen Messungen zu brauchen, bei trigonometrischen Arbeiten hat es eigentlich seinen Platz.

III. Das Meßtischchen ist ein ganz ebener quadratförmiger Tisch, der auf einem Fußgestelle steht; doch aber solche Vorrichtungen hat, daß man ihn, ohne den Dreifuß, worauf er ruht, zu verrücken, drehen, und aus der horizontalen in eine vertikale Lage, nach Erfoderniß, stellen könne. Zum Gebrauche wird es mit Papier überzogen, welches man, um es gegen Ausdehnung durch Feuchtigkeit und Einschrumpfen zu schützen, auf ausgespanntes

Lein=

Leinwand aufklebt. Ein noch nöthiges Zugehör ist ein messingenes Lineal, welches an beiden Enden vertikal gebogen ist. Die eine dieser vertikalen Beugung hat einen etwa $\frac{1}{4}$ Linie dicken vertikalen Ritz, die andere einen eben so gerichteten, aber breitern Spalt, durch dessen Mitte ein Pferdeshaar gezogen ist, welches mit dem erstern Ritze parallel gehen muß. Dieses sonst freie Lineal wird an eine auf das Tischchen gesteckte Nadel angelegt, und diese Nadel dient dem Lineale zum festen Mittelpunkte, an welchem das Lineal immer anliegen muß, wenn man es vermittelst der Durchseher in die Lage bringt, daß es vertikal über dem Schenkel des Winkels liege, welcher auch seine Spitze vertikal unter der Nadel auf der Erde hat. Ist das Lineal in die eben genannte Lage gebracht, so wird mit einem feinen Bleistifte an seiner Seite hin eine Linie auf das aufgespannte Papier gezogen. Drehet man das Lineal um die Nadel so, daß es über andere und andere Schenkel der zu messenden Winkel komme, und zieht jedesmal die Linien, wie oben, so erhält man die Winkel auf dem Tischchen in ihrer natürlichen Größe, wie die auf dem Felde sind; denn die Schenkel der Winkel auf dem Tischchen, und die, deren im Felde, liegen so, daß sie sich einander decken würden.

In der Lehre von den Ebenen (19) wird der Beweis für die Gleichheit der Winkel auf dem Tischchen mit denen auf dem Felde gegeben, indem die dortige Voraussetzung, daß die rechten und linken Schenkel dieser Winkel parallel liegen, hier eintrifft; denn das Tischchen steht mit dem Horizonte des Feldes parallel, und die Schenkel der

Win=

Winkel liegen in Vertikaler, und folglich einerlei Ebene.

IV. Das eben Gesagte betrift nur die Winkel, deren Schenkel in einerlei Horizonte (Wasserwagrechten Ebene) liegen; daher dann die Vorsicht beobachtet werden muß, daß das Tischchen einen genau horizontalen Stand habe, welches man vermittels einer Setzwage leicht zu Stande bringt.

V. Sollen Winkel gemessen werden, deren Schenkel in einer andern als horizontalen Lage sind, so muß jedesmal das Tischchen so gestellt werden, daß es entweder selbst in die nämliche Ebene mit dem Winkel, oder doch, daß seine Fläche parallel mit der Ebene komme, worinn die Winkel liegen. Allein in dieser Allgemeinheit wird es höchst selten gebraucht. Bei Höhenmessungen wird der vertikale Stand des Tischchen beobachtet, der sich vermittelst eines, durch eine Bleikugel gespannten Fadens erhalten läßt. In dem folgenden Abschnitte, von der Lage der Ebenen wird einiges vorkommen, welches zur Begründung des eben Gesagten dienen kann.

Man fodert gewöhnlich, daß von geschehenen Vermessungen eine geometrische Verzeichnung, (Grundriß, Karte) verfertiget werde, hiezu nun, und besonders bei dem Gebrauche des Meßtischchens ist ein verjüngter Maasstab nöthig, dessen Zeichnung folgende ist:

Man ziehe eine gerade Linie AG fig. 104, auf ihr sey AD senkr. und AD genau in 10 gleiche, willkürlich lange Theile getheilt; wie D 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4 u. s. w. Durch die Punkte der AD, dergleichen 1; 2, u. s. w. sind, werden mit AG Linien, wie

9; K; 8; L; u. s. w. gezogen. Man schneide ferner in AG, 10 genaue gleiche Theile, abermal von willkürlicher Länge ab; dergleichen A 9, 9; 8 und 8; 7 u. s. w. sind, und ziehe die schiefe Linie D 9 (Transversallinie). Mit D9 werden durch die Punkte 8; 7; u. s. w. Parallellinien bis zum letzten Punkte B gezogen, in B wird die, auf AG senkrechte BC errichtet; die Länge AB wird nach Belieben, noch mehrmal in AG eingetragen, und bei jedem solchen Theilpunkte senkrechte Linien E 10; F 20, u. s. w. errichtet. Diese Einrichtung giebt nun folgende Bequemlichkeit beim Gebrauche. Wenn AB die ganze Einheit ist (etwa eine Ruthe, eine Meile, u. d. g.), so ist $B1 = \frac{1}{10}$; und ma $= \frac{1}{100} AB$; $nb = \frac{2}{100} AB$; $oc = \frac{3}{100} AB$, u. s. w. Bei den eben angeführten Zehentheilen ist die Sache wegen der Verfertigung wahr; wegen der Hunderttheilen aber ist folgender Beweis zu merken: Zuerst sind alle Stücke, die von den Transversallinien im Parallelogramm ABCD, aus den mit AG parallelen Linien geschnitten worden, dergleichen y v eines ist, gleich (114, I) außer denen innerhalb der △ △ AD9 und BhC. Im letztern nun ist $BC : Bm = hC : ma$ (205); aber $Bm = \frac{1}{10} BC$, also auch $ma = \frac{1}{10} hC$; aber $hC = \frac{1}{10} DC = \frac{1}{10} AB$; folglich $ma = \frac{1}{100} AB$.

Der Gebrauch dieses Maasstabes ist: Entweder, man soll einer Linie eine bestimmte Länge auf dem Papiere, nach diesem Maasstabe geben; oder man soll die Länge einer bestimmten Linie auf dem Papiere vermittelst dieses Maasstabes angeben. Beide Fälle werden durch folgende Beispiele klar.

1) Man soll eine Linie von 15,3 Maaßtheilen, wovon B 1 einer ist, zeichnen.

Man ziehe eine gerade Linie (weil hier die Lage der Linie noch willkürlich genommen wird), und setze den einen Zirkelfuß in W, und eröffne den Zirkel (circinus) bis v; so hat die Länge $(15+\frac{3}{10})$.B1. Eben so ist tx = 2,8 . B 1.

2) Man hat die Länge einer Linie zwischen die Oeffnung beider Zirkelfüße gebracht, und findet, nachdem man in verschiedene Punkte der F 20, und solcher in dem Vierecke ABCD, die mit jenen in einerlei Parallellinien liegen, den Zirkel setzte, endlich l z, die dieser Länge der Linie gleich kam; daher ist sie = l z = 25,5 . B 1.

Wollte man B 1 für eine Ruthe gelten lassen, so ist am = 1 Fuß (eigentlich $\frac{1}{10}$ Ruthe; (Dezimalfuß), und wenn die Ruthe 16 gewöhnlicher Füße hat, so ist am = $\frac{1}{160}$ Ruthe). Nach diesem wäre am + ad = 1,1 und oc = 0,3; yo = cy + co = 6,3.

Zu merken ist, daß man beim Abnehmen solcher Maaße allemal die Zirkelsspitzen in eine einzige Linie, die mit AG parallel ist, setzen, und der eine Fuß immer in BC, oder E 10, oder F 20 u. d. g. stehen müße.

Anmerk. Schon in (26) ist erinnert worden, daß die Ruthe sowohl, als auch der Fuß nicht an allen Orten, nicht einmal in dem nämlichen Staate an allen Orten gleich sey. (Sollte es der Landespolizei nicht möglich seyn, eine Gleichheit dieser Maaße herzustellen? Und wäre diese Gleichheit nicht höchst wünschens werth?)

Hat

Hat der Geometer eine richtig eingetheilte Kette, so kann er mit dieser überall Messungen vornehmen, und sein Kettenmaas in jenes, an dem Orte, wo er mißt, herkömmliche Maas, durch die Regel Detri verwandeln. Z. B. Die Ruthe auf der Kette verhalte sich zu der an einem Orte, wo gemessen wird, wie 53 : 50, welches man durch wirkliches Gegeneinanderhalten beider Ruthen gefunden hat. Die Ruthe auf der Kette heiße R, und die andere r; so ist $R : r = 53 : 50$. Eine Linie mit R gemessen sey $= 72,8$ Ruthen, man fragt, wie viele Ruthen nach r diese Linie halte. Eine kleine Uiberlegung zeigt, daß $R > r$; daher müßen die 72,8 Ruthen mehr, als so viele Ruthen nach r seyn, folglich hat man $50 : 53 = 72,8 : x$ und $x = \frac{72,8 \times 53}{50} = 77,168$.

Hätte man Flächenmaase der obigen Ruthen zu verwandeln, so werden die Quadrate der obigen im Verhältnisse gebraucht. Z. B. 260 Quadratruthen der R, wie viele machen solche nach r? Hier ist $50^2 : 53^2 = 2500 : 2809 = 260 : x$ und $x = 292\frac{34}{250} = 292,136$; oder wenn man durch Namen die Dezimaltheile ausdrucken will; 292 Quadratruthen, 13 Quadratfuße, und 60 Quadratzolle; weil $0,136 = 0,1360$ Quadratruthen die genannten Dinge geben (229, IV).

§. 277. **Aufgabe.** Eine Weite AB fig. 105 zu messen, die man nicht unmittelbar nach (275, I) messen kann.

Auflösung. I. Man nehme einen Stand C so an, daß man von da nach A und B die Linien AC, BC nach (275, I) messen könne. Man messe

von

von C in a gerade zurücke, so, daß A C a eine gerade Linie werde, und stecke Ca = A C ab; eben dieses wird mit B C, C b beobachtet; und so ist a b = AB, und erstere kann gemessen werden.

Beweis. Weil ∢ A C B = ∢ a C b (47), und A C = a C; B C = b C; daher △ A C B ≅ a c b (§. 58) und a b = AB.

II. Wenn in Ca, Cb Hindernisse sind, die die Zurücktragung der ganzen A C, B C nicht verstatten, so trage man Stücke von A C, B C zurücke, die einerlei Verhältniß zu A C, B C haben; z. B. C D = $\frac{1}{2}$ A C, und C e = $\frac{1}{2}$ C B oder C d = $\frac{1}{3}$ A C, und so C e = $\frac{1}{3}$ C B u. d. g., und messe de; diese ist eben so ein Stück von AB, als es cd von A C ist. Denn wie oben ist ∢ A C B = ∢ D C e und A C : C d = C B : C e; daher auch A C : cd = A B : d e (206).

III. Man stelle das Meßtischchen M fig. 106 horizontal, und stecke in c die Nadel, und zeichne nach (275, III) den Winkel A c B. Man messe aus einem Punkte C, der vertikal unter dem Tischchen liegt, die Linien A C, C B, und trage solche nach dem verjüngten Maasstabe in einerlei, und so vielen Theilen in die ähnlich liegenden Schenkel des Winkels auf dem Tischchen, wie es die gemessenen A C, C B angeben, so enthält auch a b nach diesem verjüngten Maasstabe eine Zahl Maastheile, wie A B nach dem Feldmaase halten würde. Der Beweis ist, wie in (II), weil hier aus der angeführten Arbeit das △ c a b ∽ C A B wird, und daher ca : a b = C A : A B ist, d. h., die Maastheile nach dem verjüngten Maasstabe verhalten sich wie die Maastheile des Feldmases.

§. 278. Zusatz. I. Wäre der Fall so, daß man auch CB, wegen Hindernissen nicht messen könnte, doch aber von C und A den Punkt B sehen könnte, und man wollte sich der Weisung in (I) bedienen, so ist nöthig: 1) die Linie AC zurücke zu tragen, und 2) in A den Winkel CAB so zu messen, daß man einen gleichen Winkel Cab in a machen könne. Dieses kann zwar nach (67, II) bewerkstelliget werden; allein nicht ohne Schwierigkeit. Besser würde man es mit dem Winkelmesser nach (275, II) verrichten, aber auch nicht ohne viele Arbeit.

Hätte man aber den ∢ Cab = ∢ CAB gemacht, und daher ab gehörig gelegt, so ist der Punkt b so zu bestimmen, daß er mit C, B in eine gerade Linie falle. Hier ist nun wegen (61) △ ACB ≅ aCb und AB = ab.

II. Leichter wird dieser Fall vermittelst des Meßtischchens aufgelößt.

Es sey in der 107ten Figur AB zu messen, wo man weder aus A, noch dem angenommenen Standpunkte C, in B messen kann. Man stelle das Tischchen horizontal (weil hier ohne Zweifel AB sowohl, als AC und BC horizontal liegen), in C, und nehme den Winkel ACB auf das Tischchen ab (275, III). Man messe CA, und trage in den Schenkel Ca auf das Tischchen, nach dem verjüngten Maaßstabe eben so viele und eben solche verhältnißmäßige Theile, als CA beim Messen angab. Man stelle nun das Tischchen horizontal und so über A, daß A und a in eine Vertikallinie, und aC genau über AC liege (dieses letzte erhält man durch Drehen des Tischchens), und so

wird nun der Winkel cAB vermittelst des Diopterlineals abgenommen, sein einer Schenkel AB wird auf dem Tischchen die Linie cb, in b schneiden, und so ist Ab die Länge auf dem Tischchen, die sich so nach dem verjüngten Maasstabe verhält, wie AB nach dem Feldmaase.

Beweis. △ Acb ∽ △ ACB; denn ∢ Acb = ∢ ACB, und A liegt in beiden Dreiecken; folglich ist Ac : AC = Ab : AB; aber die beiden ersten Linien verhalten sich, wie die Maastheile auf dem verjüngten, und dem Feldmaasstabe; folglich auch so die zwei letzten.

§. 279. Aufgabe. Eine Höhe AB fig. 108, die auf dem Horizonte AC senkrecht steht, zu messen.

Auflösung. I Fall. Wenn man AC bis an den Fuß der Höhe AB messen kann. Man stelle das Tischchen in C, daß seine Fläche vertikal stehe, und ziehe zuerst eine Horizontallinie Ca auf dem Tischchen (wenn die Seite MN des Tischchens vermittelst der Setzwage horizontal ist, so kann man Ca parallel mit MN ziehen). Aus einem Punkte C dieser Ca wird der Winkel ACB abgenommen, CA wird gemessen, und werden die Maastheile nach dem verjüngten Maasstabe, die sich, wie die gemessenen, verhalten, in Ca getragen. Es sey Ca die Länge dieser Maastheile, in a werde ein Perpendikel ab errichtet, bis es die CB in b treffe, so verhält sich ab nach dem verjüngten Maasstabe, wie AB nach dem Feldmaase.

Beweis. Das △ Cab ∽ △ CAB, weil ∢ C = ∢ C, und A und a rechte Winkel sind; folglich Ca : CA = ab : AB.

II Fall. Wenn CA nicht bis zum Fuße A gemessen werden kann. Man nehme, wie es die 109te Figur zeigt, zween Stände in C und D; im erstern wird wie in (I) der Winkel ACB abgenommen. Die Linie CD wird gemessen, und ihr Maas, wie oben, nach dem verjüngten Maasstabe in die Linie cD aufs Tischchen getragen.

Das Tischchen wird in D so gestellt, daß cD in CA falle, oder doch cD mit CA parallel sey; aber hier muß nothwendig das Tischchen in die nämliche Ebene, in welcher es in C stand, oder doch in einer ihr parallelen Ebene gesetzt werden (wozu es verschiedene Handgriffe braucht, die hier anzuführen, zu weitläuftig seyn würde). Die erste Stellung wird allemal die thunlichste seyn.

Wird aus D auf dem Tischchen der Winkel BDc genommen, so wird sein Schenkel BD die Linie cb auf dem Tischchen treffen, und ein Perpendikel ba aus b auf die DA giebt die Höhe ba nach dem verjüngten Maasstabe.

Beweis. Weil der Winkel BCD = bcD und eben so ∢ BDC = bDc; so ist △ BCD ∽ △ bcD, und CD:cD = BD:bD. Aber auch ∢ BDA = bDa und bei A und a rechte Winkel; daher △ BDA ∽ △ bDa, und BD : bD = BA:ba, d. i., = CD:cD; aber CD und cD verhalten sich wie die Maasstäbe.

§. 280. Anmerk. Es kann seyn, daß das Tischchen nicht in dem nämlichen Horizonte mit dem Fuße der Höhe stehe; wie, wenn F fig. 108 der Fuß der Höhe wäre. Hier müßte zu dem, was in (I) vorgeschrieben ward, beobachtet werden, daß man zugleich den Winkel ACF abnehme, oder überhaupt den Winkel BCF nehme, nur so, daß zugleich die Horizontallinie CA ge-

zogen werde, damit man auf sie die Linie bf, welche sich nun so, wie BF verhält, senkrecht setzen könne. Hier muß aber AC gemessen seyn, daß man, wie in I den Punkt a auf dem Tischchen angeben könne. Diese AC zu messen, fodert es eigene Handgriffe, die in der nächsten Aufgabe sollen gewiesen werden.

Doch könnte auch die Sache so gemacht werden: Gesetzt man habe den Winkel BCF, zugleich die Horizontallinie AC abgesehen, daß sie nur auf dem Tischchen, wie Ca, liege. Man messe die schiefe CF, und trage ihr Maas verjüngt in Cf, so wird sich der Punkt f geben, durch ihn auf Ca senkrecht, wird bf gelegt, diese bf giebt das verjüngte Maas. Denn BF parallel bf (100); und daher Cf : CF = ab : AB.

Aehnlich ist der Fall, wenn das Tischchen tiefer, als der Fuß der Höhe stehe. In diesem Falle braucht man nur einen Winkel BCF aufwärts noch zu nehmen.

Wäre im zweiten Falle, für den die 109te Figur gilt, das Tischchen in D höher, oder tiefer, als die Horizontallinie ADC liegt, so würde auf dieser zweiten Station das oben Gesagte vom ersten Falle beobachtet.

§. 281. **Anmerk.** Es giebt noch viele andere Methoden, Höhen zu messen, die hier anzuführen nicht nöthig ist; man findet sie in verschiedenen Büchern der angewandten Geometrie beschrieben. Die beßten Methoden sind, die auf trigonometrischen Gründen beruhen.

§. 282. **Anmerk.** Höhen, die nicht senkrecht auf dem Horizonte stehen (schiefe Höhen), zu messen, braucht man zwar keine andere Regeln, wenn man nur den schiefen Winkel abnehmen kann, den eine solche Höhe mit dem Horizonte macht. Gesetzt in der 109ten Figur wäre BD zu messen gewesen. Daß sich bD auf dem Tischchen so verhalte, wie BD, ist schon oben erwiesen; nur mußte der Winkel BDC können gemessen werden.

§. 283. **Aufgabe. Die Länge der Horizontallinie zu finden, wenn man auf einer schiefen Ebene messen muß.**

Auflösung. Es sey A r fig. 110 zu messen, wo man nicht anders, als etwa über den Berg A b d g l n p r messen kann.

Man verfertigt sich einen Stab V Z fig. 111 etwa eine Ruthe lang. Auf diesen befestige man senkrecht einen kleinen Stab x y; an welchem hin sich ein Faden durch ein Gewichtchen y spannt; wenn x y unterwärts hängt, und folglich, wenn V Z horizontal liegt, dieser Faden mit x y einerlei Richtung haben wird. Das Messen geschieht nun so: Man halte einen Stab A a vertikal; an ihn lege man V Z horizontal, wo ich annehme, a b sey die horizontal Länge, die man auf einmal nehmen könne. In b wird abermal der vertikale Stab b c gestellt, und die horizontale Länge c d gemessen, und wird das Verfahren fortgesetzt, wie es die Zeichnung darstellt. Man erhält so die Horizontalstücke a b, c d, e f, f g, h i, u. s. w., welche den Theilen A B, B C, C D, u. s. w. der gesuchten Horizontallinie gleich sind. Denn es ist A a par. B c par. C e u. s. w. (100) aus eben dem Grunde ist a b par. A B und B C par. c d u. s. w.; daher A B = a b, B C = c d; C D = e f u. s. w. (114, I), und so erhält man die zu messende A r stückweise.

§. 284. Zusatz. Es versteht sich, daß, wenn das obige Verfahren richtig seyn soll, die Richtung der Messungen in der nämlichen Ebene, worin A r liegt, geschehen müße; denn ohne dieses würde man zwar horizontal messen, aber nicht das Maaß der geraden A r finden. Die gerade Richtung A g p r, welche eigentlich die Vertikalfläche ist, muß daher vorher abgesteckt seyn; Dieses Abstecken geschieht durch die vertikalen Stäbe e d; h g; n m;

u. s. w. Es wird einige Versuche brauchen, bis man von A nach r die vertikale Ebene treffe.

§. 285. Anmerk. Wenn man Stücke Feldes, oder kleine Erdflächenstücke mißt, so fodert die Natur der Sache, daß man die Horizontalfläche finde; dieses aber wird nur erhalten, wenn man die zur Zeichnung oder zur Berechnung der Fläche nöthigen Linien horizontal mißt.

Ist die Absicht des Messens, die Größe der Oberfläche zu finden, auf welcher Pflanzen im Wachsthume fortkommen können (und diese Absicht hat man gewöhnlich), so ist aus der Erfahrung bekannt, daß die Pflanzen nicht zu nahe stehen dürfen, um ihre Nahrung aus dem Boden sowohl, als aus der Luft gehörig erhalten zu können. Die Erfahrung lehrt, daß die Pflanzen ihren Wuchs meistens nach vertikaler Höhe treiben, und da würde gewiß, wenn auf dem schiefen Boden so die schiefe, wie auf dem horizontalen die horizontale Entfernung der Pflanzen gleich groß wäre, auf ersterm das Aufkommen der Pflanzen wegen der angeführten Ursachen nicht zu erwarten seyn; daher ist der Ertrag auf der schiefen Fläche, wenn sonst die Umstände, die sonst in Rücksicht der Lage und Güte des Bodens, u. d. gl. mit in Anschlag kommen müßen, gleich sind, nicht größer, als der auf der Horizontalebene.

Man kann also die Absicht des Messens nur erreichen, wenn man die Horizontalfläche, nicht aber die schiefe Fläche zu erhalten sucht, die freilich weniger Inhalt, aber doch den absichtlichen Inhalt giebt.

Daß aber dergleichen schiefe, aber irrige Messungen noch gar zu oft gemacht werden, und alte Feldmesser sie fast durchgängig gemacht haben, ist, leider! wahr; und so gewiß auch die obigen Gründe gegen diese Irrthümer sprechen, so wenig wird in diesen Zeiten noch auf ein besseres Messen der Feldstücke gedacht.

Dem Staats- und Privat-Landwirthschafter wünschte ich hierüber nachzudenken, um Fehler bei Vermessungen zu hindern, die sich bis über die Hälfte der Richtigkeit erstrecken können.

Die

Die Sage der mechanischen Feldmesser, daß man dergleichen schief gemessene Feldstücke nicht zeichnen könne, und man daher das horizontale Messen wählen müße, überzeugt wohl nicht. Wüßten diese Leute mit geographischen Projektionen umzugehen, und solche so zu geben, daß sie dem Beschauer der Zeichnungen deutlich würden, so fiele wohl der ganze Grund ihrer Schwierigkeit weg. Aber bei dieser gehobenen Schwierigkeit wäre doch nichts weniger, als was Richtiges gethan.

Nimmt man Flächen vermittelst des Meßtischchens auf (wovon unten noch einiges vorkommen soll), so wird man, wenn das Diopterlineal vertikal bewegliche Abseher hat, der Mühe überhoben, viele Horizontallinien messen zu müßen, wenn man (wie das immer seyn muß), den horizontalen Stand des Tischchens beobachtet.

§. 286. Aufgabe. Eine gekrümmte, oder winklichte Linie so zu messen, daß man sie mit ihren Wendungen gehörig nach einem verjüngten Maasstabe aufs Papier verzeichnen könne.

Auflösung. Es sey die gekrümmte Abcdefghiklm B 112te Figur, nach der Angabe zu messen.

Man stecke entweder eine gerade AB so ab, daß sie in die krumme Linie an verschiedenen Stellen einschneide; oder man lege $\alpha\beta$ so neben der krummen hin, die die krumme nicht berührt. Nimmt man AB, so werden aus den Krümmungen b, c, d, e, f, u. s. w. senkrechte Linien auf die AB gelassen, und bemerkt, 1) bei welchem Maase in AB (wenn man von A nach B mißt,) ein solches Perpendikel eintreffe, und wie lang solches sey; auch 2) bei welchem Maase in AB der Einschnitt geschieht; z. B. Ax = 6'; bx links = 5,3'; ferner bei Ao = 8,5'' Einschnitt u. s. w. Ay = 10,8'; yc rechts = 4,6'.; bei Ap = 13,5' Einschnitt u. s. w.

Würde $\alpha\beta$ genommen, so würde in α die senkrechte α A an den Anfang der krummen Linie gemessen; und nun völlig verfahren, wie bei Ab; nämlich $\alpha\gamma = 6'$; $b\gamma = 11,8'$; $\alpha\delta = 10,8'$; $\delta c = 3'$ u. s. w. bis in β das letzte Perpendikel an das Ende der krummen Linie gelassen wird. Die so erhaltenen Maase werden nun vermittelst des verjüngten Maasstabes, und zwar erstere auf eine gerade Linie, und zweitere auf Perpendikel, die an den Enden der Stücke Ax, Ay, oder $\alpha\gamma$; $\alpha\delta$, $\alpha\varepsilon$ u. s. w. errichtet sind, aufgetragen. Durch die so erhaltenen Punkte A, b, o, c, d, e, f, g, u. s. w. wird nun die krumme Linie geführt. Hier verhalten sich nun die Stücke auf dem Papiere, wie jene auf dem Felde.

Anmerk. Wenn von A nach b, und von da nach o bis c oder überhaupt, wenn zwischen den Endpunkten der gedachten Perpendikel noch kleine Krümmungen statt haben, so kann man, weil doch selten die größte Genauigkeit bei diesen Verzeichnungen gefodert wird, solche krumme Züge nach dem Augenmaase ausziehen; denn eigentlich setzt die Arbeit voraus, daß von einem Endpunkte des Perpendikels bis zum nächsten eine gerade Linie statt habe. Zieht man sehr viele solcher Perpendikel, so kömmt man der wahren Gestalt der krummen Linie immer näher. Die Gestalt der krummen Linie muß es übrigens zeigen, wo, und wie viele solcher Perpendikel zu messen sind.

Wenn Weege, Flüße, u. d. gl. die von solchen Krümmungen begrenzt werden, in, oder an gemessenen Stücken Feldes liegen, so pflegt man sich dieser Methode zu bedienen, und da hat schon AB, $\alpha\beta$ ihre bestimmte Lage in der gemessenen Figur.

§. 287.

§. 287. Aufgabe. I. Ein Stück Feld so zu messen, daß man seinen Inhalt nur erfahre, und II, daß man es auf das Papier verzeichnen, und zugleich ersteres erhalten könne.

Auflösung. I. Man theile die Figur durch Diagonallinien in Dreiecke, und messe die Grundlinien und Höhen dieser Dreiecke, daß man sie nach (231) ausrechnen könne.

Die 113te Figur stelle das zu messende Stück Feld vor, und im △ ABH sey HB die Grundseite. Um aus A die senkrechte Am legen und messen zu können, bediene man sich des Stabes VZ fig. 111, welcher zu dieser Absicht mit der Länge VZ in HB gelegt wird, so, daß xy irgend einmal mit Am zusammen falle; daher es gut ist, wenn in x und y kleine, auf VZ und xy senkrechte Stäbe angebracht sind, die bei aufgelegter VZ durch einen Bleifaden in vertikale, oder, (welches eben das ist) die VZ in eine horizontale Lage bringen. Man wird bald so den Punkt m finden; wenn nämlich x auf ihn kömmt, und die Stäbe in x, y und der in A in eine gerade Linie fallen. So nun kann die Lage Am gefunden und ihre Länge gemessen werden.

Bei der Diagonale HC, und der auf sie senkrechten Bn, Do, die eigentlich zu den △△ HBC, HDC gehören, wird das nämliche Verfahren angebracht, und der Inhalt beider $\triangle\triangle = \frac{1}{2} HC \times (Bn + Do)$ aufeinmal gefunden. Auch bei den △△ HEF und HGF (es wird nämlich angenommen, daß DE in gerader Verlängung in H eintreffe), die HF gemeinschaftlich, und zu ihren Höhen Eq und Gp haben, wird so verfahren, und

sofort, bis man den Inhalt aller Dreiecke, und folglich der ganzen Figur habe.

II. a, Man messe alle Grenz- und soviele Diagonallinien der Figur, als erfoderlich ist, die Figur in Dreiecken zu haben; und verzeichne nach (223, II) eine Figur vermittelst dieser Dreiecke auf das Papier; indem man nach dem verjüngten Maasstabe Linien nimmt, die sich so in allen Theilen verhalten, wie die gemessenen. Die Figur auf dem Papiere wird der im Felde ähnlich (221).

Der Inhalt der auf dem Papiere gezeichneten Figur wird vermittelst des verjüngten Maasstabes und nach (231) leicht gefunden, und verhält sich nach diesem Maasstabe, wie der von der gemessenen, nach dem Feldmaase, weil sich diese Inhalte, wie die Quadrate dieser Maasstäbe verhalten (235).

b) Die Arbeit vermittelst des Meßtischchens zu verrichten. Ich fange hier bei dem einfachsten Falle an, um die Sache desto deutlicher machen zu können.

Anmerk. Hieher gehören die Messungen solcher Feldstücke, die man nicht durchgehen kann; z. B. Sümpfe, Teiche, Wälder u. d. gl. Sind solche Flächen mit krummen Linien begrenzt, die etwa aussehen, wie die, in der 112ten Figur, so pflegt man, wenn es nur immer die Lage verstattet, diese Fläche in ein Rechteck so einzuschließen, daß die Seiten des Rechteckes sich neben der krummen Grenze hinziehen; wie, wenn $\alpha\beta$ in der obigen Figur eine Seite dieses Rechteckes wäre. Wird nun die krumme Grenze gegen jeder Seite dieses Rechteckes, nach (286) gemessen, so läßt sich die Figur der Fläche durch Hilfe des gemessenen Umfanges des Rechteckes, und der gefällten senkrechten Linien auf die Sei-

Seiten dieses Rechteckes, auf das Pappiere verzeichnen.

Den Inhalt einer solchen Figur findet man, wenn man zuerst das Rechteck berechnet; dann den Raum, der zwischen den Grenzen des Rechteckes und denen der krummlinigten Figur, enthalten ist, (wie oben der, von der krummen AbceggiklmB und den Aα; αβ, βB, einen Theil vorstellt) ins besondere berechnet, und vom Rechtecke abzieht.

Zur Berechnung dieses letzten Raumes nimmt man gewöhnlich kleine Stücke der krummen Linie für gerade an, wodurch die Figur, auf der Seite der krummen Linie, vielseitig wird. Auch pflegt man, wenn die Figur auf dem Pappiere verzeichnet ist, gerade Linien so durch die krumme Grenze zu führen, daß durch solche gerade Linien bald Stücke von der krummlinigten Fläche weg, bald darzu geschnitten werden; und man beurtheilt nach dem Augenmase, ob die weggeschnittenen Stückchen Fläche, und die darzu geschnittenen gleich sind. Durch dieses letzte Verfahren begrenzt man die Figur an der krummen Seite durch ungleich wenigere Grenzlinien, und macht daher die Sache des Ausrechnens einfacher. Ein Umstand, der gewiß sich empfiehlt; indem man bei Berechnungen sehr vieler Dreiecke fast unvermeidlich eben so vielmal kleine Fehler im Abnehmen der Maase vermittels des verjüngten Maasstabes begeht.

Bei Wäldern geht die obige Methode nicht wohl an; weil, wenn die Wälder auch nur mäßig groß sind, die Seiten des Rechteckes zu sehr weit auslaufen würde. Man pflegt daher die Grenze des Waldes in eine mehrseitige Figur einzuschließen; und die krumme Grenze des Waldes eben so, durch Hilfe dieser mehrseitigen Figur, zu verzeichnen. Doch wird weiter hinten hievon noch etwas vorkommen.

§. 288.

§. 288. Aufgabe. Die Entfernung AB fig. 114 zu messen, zu der man nicht kommen, die man aber aus zween Ständen C und D sehen kann.

Auflösung. Man setze das Tischchen gehörig in C, und nehme aus einem Punkte c auf dem Tischchen die Winkel BcA und AcD ab. Man messe CD, und trage nach einem verjüngten Maasstabe solche in cd auf das Tischchen.

Das Tischchen wird nun in D dergestalt gestellt, daß d vertikal über D, und dc eben so über DC komme. In dieser Stellung nun werden aus d die Winkel AdB und BdC abgenommen, und so schließt sich eine Figur abcd auf dem Tischchen, die der ABCD ähnlich ist, und deren Grenzlinien sich wie cd und CD, d.i., wie die Theile der Maasstäbe, verhalten.

Beweis. In den △△ bdc und BDC ist wegen des Verfahrens ∢bcd = ∢BCD, auch ∢bdc = ∢BDC; daher ∢dbc = DBC, und dc : DC = cb : CB = db : DB.

Ferner ist in den △△ acd; ACD ist ∢acd = ∢ACD und ∢adc = ∢ADC; folglich auch ∢dac = ∢DAC, und dc : DC = da : DA; folglich auch da : DA = db : DB; daher △ adb ∽ △ ADB (206), und ∢abd = ∢ABD, und ∢dab = ∢DAB, und auch da : DA = ab : AB; folglich die ganze Figur abcd ∽ ABCD (217), und cd : CD = ab : AB; wo die Glieder des ersten, und folglich die des zweiten Verhältnisses sich wie die Maasstäbe verhalten.

§. 289. Aufgabe. Ein Stück Feld vermittelst des Meßtischchens auf das Papier zu verzeichnen.

Auf-

Auflösung. I Methode. Man stelle das Tischchen in die Fläche der Figur, wie in fig. 115 in O, und nehme aus diesem Punkte die Winkel AOB, BOC, COD u. s. w. ganz herum. Man messe alle Schenkel der gedachten Winkel OA, OB, OC, OD, u. s. w., und trage aus dem Punkte O auf dem Tischchen die Feldmaaßtheile eines jeden Schenkels in den nämlichen Schenkel nach dem verjüngten Maaßstabe, so erhält man Oa, Ob, Oc auf dem Tischchen, die sich so verhalten, wie OA, OB, OC u. s. w.; und so ist △ OAB ∽ △ Oab; △ OBC ∽ Obc, u. s. w. (206); folglich auch die Figur auf dem Tischchen ähnlich der im Felde (221).

II Methode. Man wähle innerhalb oder außerhalb der zu messenden Figur zween Stände, aus deren jedem man die Grenzwinkelpunkte sehen kann.

Aus dem ersten Stande werden, wie in der ersten Methode Linien nach allen diesen Winkelpunkten, und eine nach dem zweiten Standpunkte, auf das Tischchen abgesehen, die denn eben so, wie in der I Methode Winkel auf dem Tischchen bilden.

Die Linie zwischen den beiden Standpunkten auf dem Felde wird gemessen; und ihr Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe in die abgesehene Standlinie auf das Tischchen aufgetragen, und so das Tischchen in den zweiten Standpunkt gehörig so gesetzt, daß der bemerkte Punkt auf dem Tischchen vertikal über dem im Felde, und eben so die gezeichnete Standlinie auf dem Tischchen über die im Felde komme. Aus diesem Standpunkte werden abermal nach allen den obigen Grenzwinkelpunkten Linien

abgesehen, die die ersteren in Punkten auf dem Tischchen schneiden; und eben diese Punkte sind es, die die Grenzwinkelpunkten auf dem Tischchen abgeben.

Weil durch eine eigene Zeichnung diese Methode nicht wohl zu erläutern ist, indem die Linien sich zu vielfach durchkreutzen würden, so kann man sich als Beispiel die Aufgabe (288) mit der zugehörigen Zeichnung merken. Wäre die dort gemerkte Figur ABCD so aufzunehmen gewesen, und man hätte die gedachten zween Standpunkte in den Grenzpunkten C, D, genommen, (die Annahme dieser Standpunkte ist willkürlich, wenn diese Punkte nur die Lage haben, daß man alle Grenzpunkte aus ihnen sehen kann), so erhielt man die ähnliche Figur abcd auf das Tischchen.

Gesetzt nun, auf der andern Seite der CD läge noch ein Theil der Figur, so wäre es wohl keine neue Schwierigkeit aus C und D auch noch die Winkel, die sich auf dieser Seite geben würden, abzusehen, und so auf das Tischchen das andere, noch angehörige Stück, zu erhalten. Eben dieses Beispiel läßt sich so erweitern, und immer noch andere Stücke an andern Seiten der CD hinzu denken. Mit einem Worte: Auf eben die Art, wie man in (288) die Punkte A und B auf das Tischchen durch ähnlich liegende a und b erhielt, eben so lassen sich aus den beiden Standpunkten C und D noch wohl andere Grenzpunkte mit aufnehmen; daß aber so die Aehnlichkeit der ganzen Figur auf dem Tischchen mit jener auf dem Felde herauskomme, folgt auch, weil man den Beweis, bei jedem noch hinzugekommenen Stücke, eben so wieder anbringen könne.

III Methode. Man setze das Tischchen an jeden Grenzwinkelpunkt, nehme diesen Winkel auf, und messe seinen einen Schenkel (Grenzseite), und dieser gemessene Schenkel wird so, wie die Standlinie in den vorigen Aufgaben, aufgetragen; das Tischchen aber nachher in den nächsten Winkelpunkt gehörig gesetzt. Bei dieser Methode braucht man aber die drei letztern auf einander folgenden Winkel nicht aufzunehmen, wenn man alle Seiten mißt; die ähnliche Figur läßt sich doch nach (174, II) verzeichnen.

Hat man nun nach irgend einer dieser drei Methoden eine ähnliche Figur auf dem Papiere erhalten, so kann man ihren Inhalt vermittelst des verjüngten Maasstabes, nach welchem die Figur verzeichnet ward, und nach (231) finden.

Anmerk. Die dritte Methode wird vorgeschlagen, wenn man Waldungen, oder solche Feldstücke messen soll, die nicht verstatten, daß man weder Linien durch ihre Fläche messen, noch absehen kann. Die Methode beruhet zwar auf richtigen Gründen; allein die Ausübung hat wegen dem oftmaligen Stellen des Meßtischchens Schwierigkeiten; und man läuft ohne dies bei jeder Stellung Gefahr, kleine Fehler zu begehen.

Diese Fehler können aber theils in der Stellung des Tischchens, theils im unrichtigen Auftragen der gemessenen Linien nach dem verjüngten Maasstabe, sich eräugnen.

Im ersten Falle erfolgen Fehler, wenn das Tischchen 1) nicht genau horizontal, und 2) nicht so steht, daß der Punkt auf dem Tischchen, an dem man die Winkel absieht, gerade vertikal über dem auf der Fläche des Feldes sey, an welchen letzten man die nämlichen Winkelpunkte des Feldes legt;

3) wenn die Standlinie auf dem Tischchen bei folgenden Ständen nicht genau vertikal über der Standlinie im Felde liege. Das unrichtige Auftragen kann geschehen: 1) wenn das Messen im Felde nicht genau horizontal, oder nicht gerade geschieht; 2) wenn der Feldmaasstab entweder selbst unrichtig, oder nicht richtig abgetheilt ist; 3) wenn man sich im Zählen der Maastheile irrt; 4) wenn der verjüngte Maasstab nicht scharf richtig gezeichnet ist; 5) wenn man die Maastheile auf demselben nicht scharf genug mit dem Zirkel greift; 6) wenn das Papier auf dem Tischchen ungleich angespannt ist. Vorsichtigkeiten, um die angeregten Fehler (und noch mehrere können unterlaufen) zu verhüten, wird der Anfänger allemal am beßten lernen, wenn er selbst Hand ans Werk legt; dieses letzte ist aber auch um deswillen zu rathen, weil sich nicht wohl alle Handgriffe, Vortheile und vorkommende Schwierigkeiten ausführlich, am wenigsten hier beschreiben lassen.

Uiberhaupt kann man zwar folgende allgemeine Regel zum Feldmessen geben: **Man gebe jeder Linie ihre gehörige Lage und Länge.** Allein die Befolgung davon ist so einfach nicht; nicht selten hat man mit sehr beträchtlichen Schwierigkeiten, die die Lage des Bodens schon aufwirft, zu kämpfen.

Man pflegt sich daher bei dergleichen Messungen durch Probemessen von der Richtigkeit der Arbeit zu versichern. Dieses besteht darinn, daß man, wenn man die obige zweite Methode angewandt hätte, man das Tischchen noch in einige Grenzwinkel setzt, um zu sehen, ob die ähnlich liegenden Linien auf dem Tischchen eben die Winkel machen, wie die im Felde. Oder auch, daß man mehrere Diagonale, oder Grenzlinie im Felde mißt, und dann die ähnlich liegenden Linien auf dem Tischchen nach dem, bei der Aufnahme gebrauchten verjüngten Maasstabe untersucht, ob sie hier gleichviele, gleichbenannter Theile haben. Bei der III Methode

ist es nöthig, mehrmal die Seite zu messen, die zwischen den gemessenen Schenkeln der abgenommenen Winkel statt hat, und sie, wie itzt oben gesagt wurde, mit der auf dem Tischchen vergleiche. Bei dieser Methode ist es um so nöthiger, weil sie dem Einschleichen der Fehler mehr unterworfen ist; man sich ihrer aber, wie in (287), erinnert worden, meistens bei Wäldervermessungen bedienen muß.

§. 290. Aufgabe. Ein Stück Feld in eine angegebene Zahl gleicher Theile zu theilen.

Vorbereitung. Ich schlage bei solchen Theilungen, wenn die zu theilende Figur nicht etwa ein Parallelogramm ist (welches gar selten der Fall ist), vor, eine genaue geometrische Verzeichnung nach der nächst vorigen Aufgabe zu verfertigen, und dann die Theilung auf dem Papiere vorerst vermittelst des verjüngten Maasstabes, nach welchem man die Zeichnung verfertigte, zu machen. Die folgende Weisung nimmt an, daß man jeden Theil, wo es nur immer die Umstände erlauben, in einem Vierecke gebe, weil eine andere Figur für die ökonomische Bauung nicht so schicklich ist.

Auflösung. Man suche der gezeichneten Figur Inhalt vermittelst des gebrauchten Maasstabes, von diesem wird, weil er in einer Zahl Quadratmaastheile besteht, durch die Division sogleich der verlangte eine Theil gefunden. Den so gefundenen Inhalt in einem Vierecke aus der Fläche abzuschneiden, bediene man sich folgender Weisung; die ich zugleich durch ein Beispiel erläutere: Es sey die 116te Figur in 5, 6, oder n Theile zu theilen; und ein Theil sey durch die Division = 5728,84'' gefundene (Wenn es Dezimalquadratzolle sind,

M so

so ist die obige Zahl 57 □ Ruthen, 28 □ Fuße, 84 □ Zolle). Begreiflich wird man den Theil im Vierecke geben, wenn man zwei Dreiecke in der Fläche an einander legt, die zusammen dem Inhalte des Theiles gleich sind. Man fange an der Grenzseite AB die Theilung an, und lege an AB ein Dreieck $= \frac{1}{2} . 5728,84$; dieses wird erhalten, wenn man mit $\frac{1}{2}$ AB, als der Grundseite des zu verfertigenden Dreieckes in den Inhalt dividirt, um des Dreieckes senkrechte Höhe zu finden (Rechenk. § 45). Es sey AB = 84′ und $\frac{1}{2}$ AB = 42′; so ist die Höhe $= \frac{\frac{1}{2} . 5728,84}{\frac{1}{2} . 84} = 68,2004 \ldots$, weil der Inhalt des Dreieckes ein Produckt aus der halben Grundlinie in die Höhe (230) mit der halben Grundlinie dividirt, die Höhe giebt. Man setze mn senkrecht auf AB, und gebe mn die gefundene Länge der Höhe. Durch n ziehe man mit AB die an parallel, daß man des △ BaA Spitze a in die Grenzseite AF bringe. Man hätte auch die Spitze in b legen können; denn eines muß seyn. Es ist demnach △ BaA $= \frac{1}{2}$ 5728,84. Um die andere Hälfte des Theiles noch zu geben, nehme man nun Ba zur Grundseite des zu verzeichnenden Dreieckes, und suche die Höhe op $= \frac{\frac{1}{2} 5728,84}{\frac{1}{2} \text{Ba}}$ durch p die bp parallel gelegt, so ist die Spitze b des Dreieckes baB in der andern Grenzseite BC der Figur, und ba begrenzt den ersten Theil BbaA.

Um den folgenden Theil zu finden, wird die eben gewiesene Arbeit wiederholt, nur daß man zur Erhaltung des ersten Dreieckes nun ba als Grundseite messen und brauchen müße. Will man

ha=

haben, oder foderen es die Umstände, daß eines gewissen Theiles Grenze in einen festen Punkt der Grenze der Figur falle, so wird, ehe man zu der vorigen Methode schreitet, ein Dreieck in der Figur berechnet, welches seine Spitze in dem bemerkten Grenzpunkte habe; und sieht, wie viel noch dem Theile fehle, wenn man ihm das gedachte △ giebt; diesen Mangel giebt man in einem nächst angelegten Dreiecke. Z. B. Man will, daß der zweite Theil in der obigen Figur in den Punkt C falle; hier berechne man das Dreieck Cab, und ziehe seinen Inhalt von 5728,84 ab, so wird der Rest geben, wie groß das Dreieck seyn müße, welches das noch Fehlende zusetzen müße, und welches auf die Grundseite Ca gesetzt, seine Spitze irgend in aF haben wird.

In verschiedenen Büchern findet man noch andere Methoden, dergleichen Theilungen zu machen, wovon jedoch keine alle Schwierigkeiten hebt. Wegen des oftmaligen Messen der Linien nach dem verjüngten Maasstabe, und dem eben so oftmaligen Linienziehen in der Figur sind Fehler fast unvermeidlich. Am wenigsten werden diese Fehler merkbar, wenn die Theile des verjüngten Maasstabes nicht zu klein sind, die sich so, wie die im Feldmaase verhalten sollen.

Die so auf dem Papiere getheilte Figur giebt in den Grenzseiten die Punkten b, a u. s. w., und man kann im Felde Linien Bb, Aa u. s. w. in den nämlichen Grenzseiten abstecken, die sich, wie die auf dem Papiere verhalten, wodurch man dann die Grenzpunkte a, b u. s. w. auf dem Felde erhält.

Anmerk. Es gehören noch viel mehr Arbeiten in das Gebiete der Praktik; z. B. das Wasserwägen, Absteckungen gerader Linien zwischen festen Punkten in wald- und bergigten Gegenden, derer mittlere und Endtheile man zugleich nicht übersehen kann. Auch gehört hieher die unterirdische Feldmeßkunst (Markscheidekunst). Diese Arbeiten aber hier zu beschreiben verstattet der Raum nicht; ich will einige Bücher nennen, worinn man ausführlichern Unterricht finden kann.

Joh. Tob. Mayer, gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, III Theile, Göttingen 1777. Wer gründliche Kenntniß in der Geometrie und Trigonometrie hat, kann dieses Buch brauchen, und so sind ihm fast alle andere entberlich.

Helfenzrieder, von der Geodäsie, Jngolstadt 1776. Man muß sich die Ursachen des Verfahrens selbst aus der Theorie hinzudenken.

Böhmens, Anleitung zur der Meßkunst auf dem Felde, Gießen 1759.

Kästners, Anmerkungen über die Markscheidekunst, Göttingen 1775.

Von der Lage der Ebenen und der Linien, die auf ihnen aufgerichtet sind.

§. 291. Erklärung. Eine Ebene ist eine Fläche, in die eine gerade Linie nach jeder Richtung gelegt, ganz hinein fällt. In den folgenden Betrachtungen wird gewöhnlich die Ebene ohne bestimmte, oder auch, wenn man will, ganz ohne Grenze angenommen.

§. 292.

§. 292. Grundsatz. Eine gerade Linie, die nur einen Punkt mit der Ebene gemein hat, steht auf ihr aufgerichtet; hat sie zween Punkte mit der Ebene gemein, so fällt sie ganz hinein (§ 7. IV); daher fällt eine gerade Linie entweder ganz in eine Ebene, oder sie steht ganz von ihr ab; denn ein Theil von ihr kann nicht in der Ebene liegen, und der andere von ihr abstehen.

§. 293. Zusatz. Zwo gerade Linien fg, hk fig. 117, die sich in einem Punkte c schneiden, fallen noch in eine Ebene AB; weil der Schnitt dieses nicht hindert.

§. 294. Zusatz. Daher fallen die Schenkel eines geradlinigten Winkels in eine Ebene.

§. 295. Zusatz. In den Schenkeln des Winkels kcg nehme man ein Paar Punkte d; e, und ziehe ed, so entsteht ein Dreieck dce (§. 52.): aber ed liegt in der Ebene AB (292) mit den Schenkeln cd, ce; daher fällt jedes geradlinigte Dreieck in eine Ebene, welches von Vier- und Mehrecken nicht zu behaupten ist, wenn man nicht im Voraus weiß, daß sie Ebenen sind.

§. 296. Zusatz. Das Dreieck kann sich um eine seiner Seiten, wie um eine feste Achse drehen, wodurch dann der dritte Winkelpunkt, der außer dieser Seite liegt, nothwendig in andere und andere Lagen kömmt. In jeder solcher Lagen würde das Dreieck in eine Ebene fallen, und diese Ebene kann immer die nämliche seyn, wenn sie sich etwa mit dem Dreiecke gedreht hätte; hiedurch nun kömmt die Ebene, worinn das Dreieck lag, nothwendig auch immer in andere und andere Lagen.

Folglich wird die Lage einer Ebene durch drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie sind, bestimmt; aber zwei Punkte bestimmen solche Lage nicht; sie bestimmen nur die Lage einer geraden Linie (§ 7).

§. 297. Zusatz. Zwo Ebenen, die drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie sind, gemein haben, fallen ganz zusammen; denn fielen sie unter diesen Umständen nicht zusammen, so müßte das Dreieck, welches innerhalb der gedachten Punkte statt hat, in einer dieser Ebenen liegen, in der andern nicht, in der es doch seine drei Winkelpunkte hat, welches wegen (295) nicht seyn kann. Wollte man aber annehmen, daß es außer den Grenzen dieses Dreieckes Theile dieser Ebenen gebe, die nicht zusammen fielen, so müßten gerade Linien von diesen Theilen, durch die Fläche des Dreieckes gezogen, zum Theile in der Ebene liegen, und zum Theile nicht, wider (292).

§. 298. Lehrsatz. Der Durchschnitt zwoer Ebenen ist eine gerade Linie.

Beweis. Daß der Durchschnitt nur eine Linie sey, folgt, weil die Ebenen als geometrische Flächen betrachtet, auf der Seite des Schnittes ihre Grenze haben, welche also eine Linie seyn muß (2, V). Wäre diese Linie keine gerade, so findet zwischen je drei Punkten ein Dreieck statt.

Da aber die ganze Linie des Schnittes in beiden Ebenen zugleich seyn muß, so gäbe es zwo Ebenen, die drei Winkelpunkte eines Dreieckes gemein hätten, und doch fielen sie wegen der Annahme, daß sie sich schneiden, nicht zusammen; das erste kann also wegen (297) nicht seyn.

§. 299.

§. 299. **Erklärung.** Eine gerade Linie auf eine Ebene so aufgerichtet, daß sie zu jeder Gegend der Ebene gleiche Neigung hat, oder (welches eben das ist), daß sie mit allen Linien, die auf der Ebene in ihren Berührungspunkt gezogen werden, rechte Winkel macht, heißt senkrecht auf der Ebene; sonst ist sie, wenn sie mit einigen Linien auf der Ebene schiefe Winkel macht, schief auf der Ebene.

§. 300. **Lehrsatz.** Wenn eine Linie CD, fig. 118 auf einer Ebene AB so aufgericht steht, daß sie mit zwo Linien ED, FD, die auf der Ebene liegen, und einen Winkel bilden, der im Berührungspunkte D seine Spitze hat, rechte Winkel macht, so steht CD auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Man verlänge ED in e, bis $ED = De$, und FD in f, daß auch $Df = DF$ sey, und ziehe EF, ef; so ist, weil $\angle FDE = \angle fDe$ (47); das $\triangle EDF \cong \triangle eDf$ (58), und $EF = ef$; auch $\angle EFD = \angle efD$.

Nun lege man in der Ebene eine Linie gh durch D nach einer willkürlichen Richtung; und wenn erwiesen ist, daß CD auf gh senkrecht ist, so ist sie es gewiß auf allen Linien, die durch D gelegt werden.

Es ist aber, weil $FD = Df$, und wegen oben auch $\angle EFD = \angle efD$; und $\angle gDF = \angle hDf$; das $\triangle gDF \cong \triangle fDh$ (61); woraus folgt, daß $Fg = fh$; $gD = Dh$ sey.

Ferner ist $\triangle CDF \cong \triangle CDf$ wegen $CD = CD$, $DF = Df$, und bei D in beiden rechte Winkel sind; folglich $CF = Cf$; auf die nämliche Art wird erwiesen, daß $\triangle CDE \cong \triangle CDe$ (58),

und CE = Ce sey. Aus diesen Schlüssen folgt, daß △ CFE ≅ Cfe (66), und folglich ∢ CFg = ∢ Cfh; aus diesem und aus dem obigen Beweise, daß nämlich Fg = fh; CF = Cf; folgt △ CFg ≅ △ Cfh; daher Cg = Ch; endlich △ gCD ≅ △ ChD wegen Cg = Ch; CD = CD und gD = Dh; daher ∢ CDg = ∢ CDh (13) = 90°. Dieses gilt gewiß von jeder Linie, die durch D gelegt wird; weil gh willkürlich gelegt wurde; folglich ist CD unter den angenommenen Bedingnissen auf der Ebene senkrecht (§. 299).

§. 301. Zusatz. Wenn viele Linien, wie DF, DE, Df, De, gD, hD, u. s. w. auf einer dritten CD senkrecht, in einem Punkte D, sind; so fallen alle diese Linien in eine einzige Ebene. Denn gewiß fallen zwo davon, die in D einen Winkel machen, z. B. ED; gD in eine Ebene (299), und so steht CD schon auf dieser Ebene senkrecht (300).

Gesetzt nun, eine der übrigen, wie etwa FD falle nicht in die gedachte Ebene, so, daß sie entweder über der Ebene liege, oder darunter komme. Man lege in Gedanken eine zweite Ebene durch CD, und die gedachte FD; diese zweite Ebene wird die erste, worauf CD senkrecht ist, in einer geraden Linie schneiden (298). Diese Linie heiße L; so ist gewiß, daß CD mit dieser L einen rechten Winkel mache (300): aber diese L läge im ersten Falle, (wenn nämlich FD oberhalb der ersten Ebene käme) weiter von CD, als FD; im zweiten Falle näher, also gäbe es im ersten Falle einen rechten Winkel von CD und L, und wegen der Annahme,

daß

daß auch FD senkrecht auf CD ist, blieb dieser Winkel noch ein rechter, obschon er im ersten Falle kleiner, im zweiten größer, als der von CD und L wäre, welches aber der Natur des rechten Winkels widerspricht, daher muß FD mit L zusammen fallen.

Anmerk. Senkrechte Linien auf Ebenen zu errichten, bedient man sich eines Winkelhakens, der drei Schenkel hat, wovon einer auf den andern beiden zugleich senkrecht ist; wie, wenn in der obigen Figur ED, FD die zwei Schenkel wären, auf denen CD senkrecht ist.

Ist nun der Punkt D in einer Ebene angegeben, bei welchem die senkrechte Linie errichtet werden soll, so wird der Schenkel CD an diesen Punkt geführt, und die beiden andern liegen in der Ebene; und CD giebt die Lage der zu errichtenden Linie an.

Diese Auflösung ist mechanisch, kann aber in vielen praktischen Fällen gebraucht werden; eine geometrische Auflösung wird weiter unten gegeben werden.

§. 302. Zusatz. In einem Punkte D, fig. 119 einer Ebene AB giebt es nur eine senkrechte Linie CD. Wollte man nämlich annehmen, DK könne auch in D senkrecht seyn; so lege man durch CD, DK eine Ebene CDE (293), welche die erste Ebene in der geraden DE schneidet. Nun ist vermöge der Annahme CDE ein rechter Winkel; aber wenn auch DK senkrecht wäre, so wäre noch ∢ CDE — CDK = 90°, welches nicht seyn kann.

§. 303. Zusatz. I. Eben so wenig kann aus einem Punkte C außerhalb der Ebene mehr als eine senkrechte Linie gezogen werden. Es sey CD senkrecht; wollte man noch eine CF auch auf die

Ebene senkrecht setzen, so hat offenbar von F nach D eine gerade Linie statt, und es würde ein Dreieck CFD von zwei rechten Winkeln statt haben wider (108).

II. Folglich wird auch der Abstand eines Punktes von einer Ebene durch die senkrechte Linie von ihm auf die Ebene gemessen; es gilt nämlich hier was in (82) erwiesen ist; nämlich die senkrechte bildet mit jeder schiefen ein Dreieck, worinn die senkrechte die kürzeste ist.

§. 304. Lehrsatz. I. Wenn im Mittelpunkte C einer Kreisfläche ABEF fig. 120 eine senkrechte Linie DC errichtet wird, und man nimmt in DC einen Punkt, wo man will, an, so steht dieser gleich weit von allen Punkten des Kreises ab.

II. Wenn von einem willkürlich angenommenen Punkte einer, im Mittelpunkte errichteten Linie, gerade Linien an den Kreis gezogen werden, und diese Linen sind alle gleich; so steht die errichtete Linie senkrecht auf der Kreisfläche.

Beweis. I. D sey der angenommene Punkt der errichteten senkrechten Linie. Man ziehe mehrere gerade Linien DA; DB; DE; DF; u. s. w. an den Kreis, und lege aus C an die gedachten Kreispunkte Halbmesser CA, CB u. s. w., so entstehen lauter gleiche Dreiecke wegen (58), in welcher CD zu allen gehört, und die Halbmesser gleich sind; auch entstehen überall rechte Winkel von DC und den Halbmessern (300), folglich sind die Linien DB, DA, u. s. w. gleich, und von diesen wird der Abstand des Punktes D von den Kreispunkten gemessen (9).

II.

II. Es sey, wie oben, D der angenommene Punkt. Man ziehe durch C verschiedene Durchmesser FB, AE u. s. w. Nun ziehe man DA, DB, DE, DF von denen bekannt sey, daß sie alle gleich seyen, so giebt es gleichschenklichte Dreiecke; dergleichen ADE; FDB sind; folglich steht DC senkrecht auf allen so gezogenen Durchmessern (86, II); und daher auch auf der Ebene der Kreisfläche (299).

§. 305. Zusatz. Die Linien DE, DB, DA, u. s. w. fallen nicht in eine Ebene, weil die Punkte E; B; A; F; u. s. w. in dem krummen Kreise nicht in eine Ebene fallen können.

§. 306. Erklärung. Die Neigung zwoer Ebenen AD, AE, fig. 121, die sich in der geraden AB schneiden, heißt der Ebenen Winkel.

§. 307. Lehrsatz. Das Maas des Ebenen Winkels ist ein Zirkelbogen po zwischen beiden Ebenen, der seinen Mittelpunkt im Schnitte AB hat, und dessen Halbmesser auf diesem Schnitte senkrecht stehen.

Beweis. Die Ebene AD liege zu Anfange auf der AE; und unter den unendlich vielen Punkten, die sich in beiden Ebenen berühren, nehme ich nur p in der obern und o in der untern an, die so aufeinander liegen. Dreht sich nun AD so um den gemeinschaftlichen Schnitt AB, daß die Ebenen in AB unverrückt bleiben, so kömmt der Punkt p immer in andere und andere Lagen; seine Entfernung von AB (es ist die senkrechte pC (§. 85); auch diese liegt zu Anfange auf oC; bleibt aber immer die nämliche pC; folglich beschreibt pC einen Kreisbogen op (27), der in eben dem Verhältnisse

grö-

größer oder kleiner wird, wie sich AD mehr oder weniger von AE wegdreht; also mißt op diesen Ebenen Winkel (42).

Schon daraus, daß die Entfernung der Punkte p und o von AB durch die senkrechte pC = oC gemessen werden, und welche beim folgenden Drehen immer die nämlichen bleiben, folgt, daß die des messenden Bogens Halbmesser auf AB senkr. sind. Man könnte sich aber eine Linie von einem andern Punkte, als C, etwa von A nach o und p. denken; auch diese bleibt bei dem Drehen der Ebene AD immer gleich; aber sie ist die senkrechte auf AB nicht; sie kömmt bei dem Drehen immer in andere und andere Ebenen (305), und ist also des beschriebenen Kreises Halbmesser nicht, weil sie nicht in einer Ebene liegt, welches vom beschreibenden Halbmesser gefodert wird (27).

§. 308. Zusatz. I. Wenn ein solcher Bogen ein Quadrant ist, so stehen die Ebenen senkrecht auf einander, und umgekehrt, sind die Ebenen senkrecht auf einander, so ist der Bogen ein Quadrant.

II. Wenn schneidende Ebenen entweder Scheidel- oder Nebenwinkel machen, so verhält es sich mit diesen Winkeln, wie mit solchen von Linien gebildeten, oder wie die in (§. 43, 45, 47); weil die Halbmesser, des messenden Bogens, auf der andern Seite des gemeinschaftlichen Schnittes verlängt, auch wieder die Halbmesser des messenden Bogens auf dieser andern Seite abgeben; folglich die Linienwinkel dieser Halbmesser zugleich die Ebenenwinkel messen.

§. 309.

§. 309. Zusatz. I. Wenn eine Linie AB auf einer Ebene HI fig. 122 senkrecht ist, und man legt eine Ebene FG, nach welcher Richtung man will, an diese AB; so steht FG senkrecht auf HI. Denn auf den Schnitt GE lege man in den Punkt B die CB senkrecht; so ist der rechte Winkel ABC zugleich der Neigungswinkel der beiden Ebenen (307).

II. Steht die Ebene FG auf der Ebene HI. senkrecht, und man legt AB so in die Ebene FG, daß sie auf dem Schnitte senkrecht steht, so steht auch AB auf der Ebene HI senkrecht; denn wenn BC in den Punkt B, wohin AB eintrift, senkrecht, aber in der Ebene HI liegend, gezogen wird, so steht AB auf BC senkr.; weil itzt AB, BC die zween Halbmesser sind, zwischen welchen der Bogen, als Maas des Winkels der Ebenen statt hat, und dieser Winkel ein rechter ist; folglich ist AB auf BE und BC, und so auf der Ebene HI. senkrecht (§. 300).

III. Wenn, wie oben die zwo genannten Ebenen senkrecht auf einander stehen, und man errichtet in ihrem Schnitte GE irgend in einem Punkte B eine senkrechte Linie auf der einen Ebene, z. B. auf HI; so fällt diese Linie nothwendig in die andere Ebene. Die gedachte senkrechte Linie sey AB; fiel sie nicht in die Ebene FG, so stände sie von ihr ab; und zwischen ihr und einer andern in dem Punkte B senkrecht errichteten, aber in FG liegenden Linie fände noch ein Winkel statt, und eine von beiden würde nicht senkrecht auf HI seyn; aber die erste ist es wegen der Annahme, und die zweite ist auch, wegen (II) möglich; wenn aber

beide

beide verschiedene Neigung gegen die Ebene haben, so können sie nicht beide zugleich senkrecht seyn (302); daher fällt die senkrechte Linie in die senkrecht stehende Ebene G F.

IV. Wenn alles, wie in II ist, AB in FG nur einen Punkt hat, aber auf der Ebene HI senkrecht ist, so fällt diese AB nothwendig ganz in FG; denn stände sie von ihr ab, so könnte sie nicht senkrecht auf HI seyn (III); welches widersprechend wäre.

§. 310. Zusatz. Wenn zwo Ebenen CD und EF fig. 123 auf einer dritten MN senkrecht stehen, und sich schneiden, so ist ihr Schnitt ab auch senkrecht auf dieser dritten Ebene. Denn wenn in b eine senkrechte Linie auf MN errichtet würde, so müßte diese nothwendig in beiden Ebenen zugleich liegen (309, III); aber es giebt außer ab keine andere Linie, die in beiden Ebenen zugleich liegt (298); folglich ist diese ab auf MN senkrecht.

§. 311. Zusatz. I. Wenn zwo Linien AB; CD auf einer Ebenen KL fig. 124 senkrecht stehen, so sind sie parallel; denn man lege durch AB eine Ebene (sie ist senkrecht auf KL (309),) so, daß sie in AC einschneide; und so muß CD nothwendig in die so gelegte Ebene fallen (309, III), also liegen AB, CD in einer Ebene, welches die erste nothwendige Eigenschaft der Parallellinien ist; aber auch machen sie mit AC die erfoderlichen Winkel (100).

II. Wenn zwo Linien AB, CD parallel sind, und man weiß, daß eine von ihnen z. B. AB auf der Ebene KL senkrecht stehe, so steht die ander CD auch

auf

auf KL senkrecht; denn beide liegen wegen ihrem parallelen Stande in einer Ebene; und diese Ebene muß, wegen (309, I) auf KL senkrecht seyn; aber CD, welche mit AB parallel ist, macht auf dem Schnitte AC rechte Winkel (102, III); folglich steht CD auch auf KL senkrecht (309, II).

§. 312. Zusatz. Wenn zwo Linien AB, CD, jede von ihnen, mit einer dritten EF fig. 125, parallel sind, so ist AB, CD unter sich parallel, ob schon nicht alle drei in einer Ebene liegen; denn man ziehe aus einem in EF angenommenen Punkte G die senkrechte GH auf AB, und die senkrechte GI auf CD, beide senkrechte Linien liegen in eignen Ebenen, und zwar erstere in der Ebene ABFE, worinn die Parallelen AB, EF liegen, und die andere in der Ebene EFDC. Durch HGI kann eine Ebene gelegt werden (294); auf dieser Ebene nun stehen HB und ID, oder die ganzen AB, CD senkrecht (311, II); folglich AB, CD parallel (311, I).

§. 313. Lehrsatz. **Wenn zween Winkel CAD und EBF fig. 126 nach einer Gegend ihre Spitzen haben, und die rechten Schenkel AC, BE, desgleichen die linken AD, FB parallel sind, so sind diese Winkel gleich.**

Beweis. Man ziehe AB; und nehme AC = BE; und ziehe CE; so ist ACEB ein Parallelogramm (117). Aus eben den Gründen wird, wenn AD = BF genommen ist, auch ADBF ein Parallelogramm; folglich AB = CE = DF; aber auch CE parallel DF (312), und folglich, wenn CD, EF gezogen werden, ist CDEF ein Paralle-

lelogramm (117); daher △ ACD ≅ △ BEF (66) und ∢ CAD = ∢ EBF.

§. 314. Zusatz. Der Beweis kann leicht auf mehrere Winkel ausgedehnt werden, wenn ihre Schenkel die gedachte Lage haben; weil er von jedem Paare gilt.

§. 315. Aufgabe. Geometrisch aus einem Punkte A über einer Ebene PQ fig. 127 eine senkrechte Linie auf die Ebene zu ziehen.

Auflösung. I. Man ziehe eine Linie DE in der Ebene nach einer willkürlichen Lage, und lasse aus A eine senkrechte Linie CA auf DE fallen (73). In den Punkt C wird BC in der Ebene liegend, auf DE senkrecht gezogen (74). Auf diese BC, die hinlänglich verlängt ist, lasse man AB senkrecht, so ist auch AB auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Man ziehe FG durch B parallel mit DE. Nun ist aber klar, daß durch CAB eine Ebene statt habe (294). Auf dieser Ebene CAB steht aber DE senkrecht, weil DE auf AC und CB senkrecht ist (300); aber auch FG ist senkrecht auf der Ebene ABC (310, II), und der Winkel ABG = 90°, und wegen der Verzeichnung ist der ∢ ABC = 90°; folglich ist AB auf BG und BC und folglich auf der Ebene PQ senkrecht (300).

§. 316. Zusatz. Wenn man nur von dem obigen Verfahren folgendes beibehält: Auf die Ebene PQ wird eine Linie AC unter einem willkürlichen Winkel gesetzt; durch den Berührungspunkt C wird in willkürlicher Lage eine Linie DE gelegt; aber auf DE wird aus C eine senkrechte CB in der Ebene PQ liegend gezogen, und nun wird in die

Schen-

Schenkel A C, CB des Winkels A CB eine Ebene gelegt; diese Ebene ACB steht senkrecht auf PQ. Denn wegen (300) ist CE senkrecht auf der Ebene ACB; aber PQ liegt in dieser senkrechten CE; folglich ist PQ senkrecht auf ACB (309).

§. 317. Aufgabe. Geometrisch aus einem gegebenen Punkte H, der in der Ebene PQ liegt, eine senkrechte Linie HI zu errichten fig. 127.

Auflösung. Man lasse aus einem willkürlichen Punkte A eine senkrechte AB fallen (315). Es könnte seyn, daß diese AB die gesuchte wäre, wenn nämlich B in H fiele; doch werde angenommen, B und H liegen nicht zusammen. Man ziehe daher durch H die Linie HI parallel mit AB (101, II), so ist HI auf der Ebene senkr. (311, II).

§. 318. Aufgabe. Die Weise anzugeben, wie der schiefe Winkel, den eine Linie mit einer Ebene macht, gemessen werde.

Auflösung. Man lasse aus einem Punkte der schiefen Linie auf die Ebene eine senkrechte Linie fallen; wie, wenn in der 127ten Figur AC die schiefe Linie wäre, und man ließ aus A, die AB auf PQ senkrecht. Man verbinde beider Linien Berührungspunkte C, B mit einer geraden CB; so ist der Winkel ACB zwischen AC und der gedachten BC der spitze Neigungswinkel, welcher von 180 abgezogen, den stumpfen übrig läßt.

Beweis. Ich nehme in dem Punkte C eine senkrechte Linie CK an, und stelle mir vor, AC sey zu erst in dieser senkrechten Lage CK gewesen, und sey durch Bewegung in die schiefe Lage gekommen; der Winkel KCA ist also der, um welchen

CA von der senkrechten Lage gekommen ist. Nun ist es wohl einerlei, entweder den Winkel, den AC in der schiefen Lage mit der Ebene, oder den, welchen sie mit dieser senkrechten KC macht, anzugeben; weil einer den andern bestimmt; aber KCA wird gemessen durch einen Bogen, welcher mit KC und AC in einer Ebene liegt; nun ist aber die Ebene durch KC nothwendig senkr. auf PQ (309); die Lage dieser Ebene ist durch die Punkte K, C, und einem in CA bestimmt (296); zieht man aus einem Punkte der CA eine senkrechte Linie auf PQ (dergleichen AB ist), so liegt diese AB nothwendig in der Ebene KCA (309, IV); aber AB ist auch mit KC parallel (311); folglich bestimmt AB so gut, als CK die Lage der Ebene, in welcher der Bogen liegt, der den schiefen Winkel ACB mißt, den CA mit PQ macht. Es ist demnach der Bogen, welcher den schiefen Winkel einer Linie gegen eine Ebene, mißt, ein solcher, welcher in einer Ebene liegt, die auf der, worinn die schiefe Linie errichtet steht, senkrecht ist.

§. 319. **Erklärung.** Eine Linie liegt mit einer Ebene gleichlaufend, wenn sie und die Ebene bis ins Unendliche zu beiden Seiten verlängt werden, und hiebei doch auf keiner Seite zusammenstoßen.

§. 320. **Aufgabe.** Auf einer Ebene AB fig. 128 ist eine Linie CD der Lage nach gegeben, man soll eine Linie EF außerhalb der Ebene mit CD parallel legen, die zugleich mit der Ebene AB parallel sey.

Auflösung. I. Fall. Wenn kein Punkt der EF angegeben ist, durch welchen sie gehen soll.

Man

Man lege eine Ebene in CD, die mit AB einen willkürlichen Winkel macht, und ziehe in ihr die Linie EF parallel; diese ist nun wegen der Verzeichnung mit CD parallel. Aber die Ebene durch CD hat mit AB nur die Linie CD gemein (296), sonst stehen alle Theile von ihr ab; daher steht EF ganz von der Ebene AB ab; daß aber EF bei jeder Verlängung von ihr, mit ihrer Ebene und so CD mit der ihrigen nicht zusammenstoßen, ist klar; denn der Zusammenstoß könnte nur mit EF und CD geschehen, welches aber unmöglich ist.

II. Wenn ein Punkt, etwa E außer der Ebene AB gegeben ist, durch welchen die gedachte Parallele EF liegen soll; so geschieht alles, wie oben; nur wird die Ebene durch CD so gelegt, daß sie diesen Punkt treffe (296).

§. 321. Lehrsatz. Senkrechte Linien von einer, außer der Ebene liegenden, Parallellinie, auf diese Ebene sind I gleich; und II liegen ihre Berührungspunkte, die sie in der Ebene haben, in einer geraden Linie auf der Ebene; und III liegen sie alle in einer einzigen Ebene.

Beweis. I. Es sey nach der vorigen Aufgabe EF der Ebene AB parallel; und folglich durch EF und CD die Ebene CDFE gelegt. Die Ebene DFE macht mit AB einen gewissen bestimmten Winkel, der durch den Linienwinkel nmo, oder qpr gemessen wird; weil hier angenommen ist, daß nm.; om; desgleichen qp; rp auf CD senkrecht sind (307). Zur Erläuterung wird erinnert, daß n und q und E in EF; o, r und s aber in der Ebene AB sind, in welche letztere Punkte die senkrechten Linien aus n, q und F fallen. Diese senk-

rechten Linien will ich no, qr, Fs nennen. Offenbar haben die Dreiecke nmo, qpr, FDs bei o, r und s rechte, und bei m, p, D gleiche Winkel; die Linien mn, pq, FD sind auch gleich (96); daher sind die Dreiecke ≅ (61.); folglich sind no = qr = sF.

II. Aus (I) folgt, daß mo = pr = Ds sey; auch, daß diese Linien alle auf CD senkrecht sind; daher geht durch sie alle eine Parallellinie or S (92), welche eine gerade Linie ist.

III. Weil n, q, F in der geraden angegebenen EF liegen, so lege man eine Ebene durch EF so, daß on in sie falle; diese Ebene schneidet die Ebene AB gewiß in einer geraden Linie (298), und steht auch auf AB senkrecht (309, I); aber wegen (309, IV) fallen qr, sF auch ganz in diese senkrechte Ebene durch on; folglich gehen sie mit dieser Ebene durch den Schnitt, welcher in AB gemacht wird, aber dieser Schnitt ist eine gerade Linie.

§. 322. Zusatz. Wenn daher zwo senkrechte Linien no, qr, die von der, außer der Ebene AB liegenden Linie EF, auf die Ebene gezogen werden, gleich sind; so liegt EF parallel mit der Ebene; weil in diesem Falle die EF in zwei Punkten, und daher ganz von der Ebene AB gleichweit absteht (§. 7).

§. 323. Erklärung. Zwo oder mehrere Ebenen sind gleichlaufend, wenn sie nach allen Seiten, so weit man will, erweitert werden, und nirgend zusammenstoßen.

§. 324. Zusatz. I. Wenn daher zwo gleichlaufende Ebenen AB, CD; fig. 129 von einer dritten

EF

EF geschnitten werden, so sind die Schneidungslinien m n; o p parallel; denn sie können verlängt nie zusammenstoßen, weil sie in parallelen Ebenen, und doch auch in einer Ebene EF liegen (89, 90).

II. Zwischen den parallelen Ebenen AB, CD zwo Parallellinien o m, p n gezogen, sind gleich. Denn in ihren Berührungspunkten o, p hat die gerade op, und in m, n die gerade m n statt, aber o p und m n fallen in die nämliche Ebene, worinn die Parallellinien liegen, sie sind daher auch parallel (I), und o p m n ein Parallelogramm (114), und o m = p n.

§. 325. Zusatz. Wenn zwo Ebenen in drei Punkten, die nicht in einer geraden Linie liegen, gleichweiten Abstand von einander haben; so haben sie solchen überall (296), und sind daher gleichlaufend.

§. 326. Zusatz. Der Abstand zwoer Ebenen muß durch senkrechte Linien gemessen werden, nach eben der Art, wie (91) zu schließen.

§. 327. Lehrsatz. I. Wenn zwo Ebenen KL, MN fig. 130 parallel sind, und man errichtet in einer MN eine senkrechte Linie BA, und verlängt solche bis in die andere Ebene KL, so steht solche auch auf KL senkrecht.

II. Wenn eine Linie AB auf zwo Ebenen KL, MN zugleich senkrecht ist, so sind diese Ebenen parallel.

Beweis. I. Man lege in AB zwo Ebenen, die in AB ihren gemeinschaftlichen Schnitt haben; diese schneiden die untere MN in Linien BD; BF,

und stehen beide auf MN senkrecht (309); diese zwo eingelegten Ebenen schneiden aber auch die KL in Linien AC und AE. Daher ist AC parallel BD und AE parallel BF (324); folglich $\sphericalangle ABD = 90° = \sphericalangle BAC$; und der Winkel $ABF = 90° = \sphericalangle BAE$ (103, II), daher AB auf KL senkr. (300).

II. Man lege an AB mehrere Ebenen, die die obere KL und die untere MN schneiden; diese Ebenen alle sind auf KL und MN zugleich senkrecht (309). Jedes Paar solcher Schneidungslinien, die in einer so eingelegten Ebene liegen, sonst aber die eine in der obern KL, die andere in der untern MN liegt, sind parallel (97, I); folglich können die Ebenen nach keiner Seite zusammenstoßen, sie mögen erweitert werden, wie man will; und sind daher parallel (323).

§. 328. Lehrsatz. Wenn zwo parallele Ebenen AB, CD fig. 131, von einer dritten Ebene EF geschnitten werden, so entstehen Wechselwinkel omn; qnm; imgleichen innere omn; pnm an den Schnitten EG; FH; und wenn die dritte Ebene EF über die gedachten Schnitte hinaus verlängt wird, auch äußerer und innerer Winkel. Von diesen Ebenenwinkeln gilt alles, was von solchen Linienwinkeln in (102) gesagt ist.

Beweis. Die Linien om, nm seyen auf dem Schnitte EG senkrecht, und wenn eine Ebene durch om, nm gelegt wird, so steht diese auf der Ebene EF senkrecht (316), auch schneidet die Ebene omn, wenn sie gehörig verlängt wird, die Ebene CD in pnq. Es ist aber EG parallel HF (324); daher ist mn auch senkrecht auf HF (103, II), und weil

mn, und pn in einer Ebene sind, ist auch pn senkrecht auf HF (316); folglich werden die Neigungen, die die Ebenen AB, CD mit EF machen, vermittels der Linienwinkel omn; mnp u. s. w., gemessen; aber or parallel mit pq (324) und sie werden von einer Linie mn geschnitten. Von den Winkeln nun, welche pq, or machen, ist in (102) das Nöthige erwiesen, und es gilt auch für die Ebenenwinkel.

§. 329. Zusatz. Gleiche Ebenenwinkel, wie stv; fig. 131, II und omn fig. 131, I fallen ganz in einander, wenn man sie in ihren Scheideln EG, und eg auf einander, und eine Ebene des einen Winkels auf eine des andern legt. Es seyen om, nm auf EG; desgleichen st, vt auf eg senkrecht, so sind ∢ omn = ∢ stv; beide Linienwinkel bestimmen die Neigung der Ebenenwinkel (307). Wenn nun eg so auf EG gelegt wird, daß t in m komme, und die Ebene ef auf EF liegt, so fällt tv auf mn (79, II), und weil man sich ferner eine Ebene omn, durch mn gelegt, vorstellen kann, auf welcher EG senkrecht ist (300), so liegen nm, om; aber auch tv; st in dieser Ebene; und wegen ∢ omn = ∢ stv nothwendig st auf om; und so hat nun auch ag die Punkte e, s, t mit AG gemein, und fällt daher ganz in sie (297).

330. Lehrsatz. Zwischen den parallelen Ebenen K; M. fig. 132 sind die Linien AB; CD u. s. w. in willkürlichen Lagen gegen diese Ebenen gezogen. Man lege die Ebene L parallel zwischen die vorigen, daß L die Linien in n und o schneide, so werden sich die ganzen Linien, wie ihre zugehörigen Stücke zwischen einerlei Ebenen verhalten; auch verhalten

sich die, zu den nämlichen Linien gehörigen Stücke, auf der einen Seite der Ebene L, wie die auf der andern; oder es ist AB : CD = nB : oD = An : Co.

Beweis. Man verbinde von einem Paar Linien AB, CD die Berührungspunkte A; C, durch AC; ferner B; D, durch BD, und ziehe AD; so ist △ ABD in einer Ebene (295), und mn parallel BD (324); daher (◎) AB : AD = nB : mD = An : Am (204). In dem △ ACD ist wegen den nämlichen Gründen mo parallel AC, und daher CD : AD = oD : mD = Co : Am (☾). Aus (◎) wird durch Verwechselung AB : nB = AD : mD und nB : An = mD : Am; aus (☾) wird eben so CD : oD = AD : mD; und oD : Co = mD : Am; folglich AB : nB = CD : oD und nB : An = oD : Co; oder AB : CD = nB : oD = An : Co.

§. 331. Lehrsatz. Wenn zwo Linien, wie AB; CD auf einer Ebene PQ fig. 133 stehen, und unter sich parallel sind, so machen sie gegen die Ebene gleiche Neigungswinkel BAE; DCF.

Beweis. Man lasse aus Punkten B und D von ihnen die senkrechten Linien BE; DF auf die Ebene fallen; so sind auch BE, DF parallel (311, I); daher ∢ ABE = ∢ CDF (313); folglich in den rechtw. △△ ABE; CDF; über dieses auch noch ∢ BAE = ∢ DCF (107). Aber die gedachten ∢ messen die Neigungen der AB und CD gegen die Ebene (318).

332. Lehrsatz. Wenn die Schenkel des ∢ BAC, den Schenkeln des Winkels EDF parallel sind, so sind die Ebenen MN, OP fig. 134, die durch diese Winkelschenkel gelegt werden, parallel.

Bew.

Beweis. Man lasse von A auf die Ebene OP die senkrechte AG fallen; sie kann in D eintreffen, oder nicht; im ersten Falle würde G und D einerlei seyn. Da wäre der Winkel ADE = 90° = ∢ ADF (299). Fällt AG nicht in D, sondern in G, so werde durch G die GH mit DE, und GI mit DF parallel gezogen, so ist auch GH und GI mit AB und AC parallel (312); aber auch ∢ AGH = 90° = AGI.

Obschon nicht im Satze ausgedruckt ist, daß ∢ A = ∢ D sey, so kann doch, wenn AC par. DF ist, nicht auch AC mit DE parallel seyn; weil sonst DE parallel DF wäre (312); wider die Voraussetzung, daß DE, DF Schenkel des Winkels D sind. Daher muß nun DE mit AB parallel seyn, und so sind die Winkel A und D gleich (313).

AC und GI liegen aber auch, vermöge der Verzeichnung, in einer Ebene, und es ist ∢ GAC = ∢ AGI = 90°. Aber auch ist eben so AB parallel GH; und so ist AG auch auf der Ebene MN senkrecht; folglich ist MN par. OP (327, II).

Wären die Schenkel des Winkels edf in der untern Ebene so gelegt, daß zwar AC parall. df und AB parallel de, aber die Spitzen der Winkel nicht nach einer Seite, auch nicht entgegengesetzt, sondern so liegen, daß sich die rechten und linken Schenkel, wenn sie gehörig verlängt sind, schneiden würden, so ist der Satz noch wahr; allein die Winkel verhalten sich, wie zwei an einer Seite eines Parallelogrammes.

Man ziehe nämlich wie oben, AG; GI; GH; so ist de parallel GH; und df parallel GI; und der

Beweis für die parallele Lage der Ebenen MN; OP der nämliche. Aber de wird gehörig verlängt, GI schneiden, weil GI die de, welche mit GH par. ist, schneidet (99, IV); es geschehe in m. Aus eben dem Grunde werden sich df und GH in n schneiden; und so ist gmdn ein Parallelogramm, worinn ∢ n = ∢ edf (102, II); aber n und HGI liegen an einer Seite des Parallelogrammes.

Von den geometrischen Körpern.

§. 333. Erklärung. Mehrere Flächenwinkel, jeder kleiner, als 180°, auch deren Summe kleiner, als 2.180° ist; dergleichen in der 135ten Figur, CAB; CAD; DAB, sind, und die ihre Spitzen in einem Punkte A haben, bilden einen Körperwinkel A (Körperecke), wenn auch über dieses ihre Schenkel AB; AD; AC so an einander liegen, daß sie die Schnitte der Ebenen Winkel nach einer Seite hohl bilden. Man kann die genannten Flächenwinkel Seitenecken nennen.

§. 334. Zween Flächenwinkel von der oben genannten Größe können keinen Körperwinkel bilden; die zwo Ebenen, worinn sie liegen, können höchstens nur einen Ebenenwinkel bilden; und da blieb die Oefnung dieses Ebenenwinkels, welche allemal noch mit einem Flächenwinkel geschlossen werden kann.

§. 335. Daher werden wenigstens drei Flächenwinkel zur Bildung eines Körperwinkels erfodert.

§. 336.

§. 336. Lehrsatz. Wenn drei Flächenwinkel einen Körperwinkel bilden sollen, so müßen jede zween größer, als der dritte, seyn.

Beweis. Wären die drei Winkel gleich, so ist der Satz für sich wahr; allein sie sollen ungleich seyn, und CAD sey der größte, so kann doch erwiesen werden, daß ∢ CAD < ∢ CAB + ∢ DAB.

Man mache nämlich ∢ CAE = ∢ CAB (67, II), und nehme AE = AB = AC, und ziehe die Linien CED; DB; AB; so ist das △ BAC ≅ △ CAE (58), und daher CB = CE.

Im △ CBD, worauf die Flächenwinkel aufgerichtet stehen, ist CB + BD > CD (§. 54).

Man ziehe auf beiden CB = CE ab, so ist BD > ED (Rechenk. 337, IV 1); folglich ∢ EAD < ∢ BAD (85, II), folglich auch ∢ EAD + ∢ CAE < ∢ BAD + ∢ CAB, d. i., ∢ CAD < ∢ DAB + ∢ CAB.

§. 337. Zusatz. Hieraus erhellet, wie die drei Seitenecken beschaffen seyn müßen, daß ein Körperwinkel aus ihnen könne zusammengesetzt werden; nämlich je zwei müßen größer als der andere dritte seyn.

§. 338. Zusatz. Wenn auch mehr als drei Seitenecke die Körperecke ausmachen, so müßen doch alle, weniger einer, größer seyn, als diese eine; denn gesetzt, es wären ihrer vier, wie in der 136ten Figur CAD, DAE, EAF, FAC; und CAD sey die größte, so läßt sich unstreitig eine Diagonalecke CAE legen (293). Nun ist aber CAD < CAE + DAE (336); aus dem näm-

li-

lichen Grunde ist aber CAE $<$ EAF $+$ FAC, daher noch vielmehr CAD $<$ EAF $+$ FAC $+$ DAE. Dieser Satz läßt sich so auf mehrere Seitenecken fortsetzen.

§. 339. Lehrsatz. Wenn eine Körperecke aus drei Seitenecken besteht, wie in der 135ten Figur, so machen diese drei Seitenecken weniger, als vier rechte Winkel, oder weniger, als 360°.

Beweis. In den Schenkeln AC, AB, AD der Seitenecken nehme man die Punkte B, C, D so; daß die Schenkel willkürlich lang sind, und ziehe CD; CB; DB.

Weil A ein Körperwinkel ist, so liegen AC; AB; AD außer der Ebene CBD, aber auch auf einer Seite derselben; und so entstehen in B;D;C wieder dreiseitigen Körperecke (333). Die Ecke B ist aus den Seitenecken CBA; DBA und CBD zusammengesetzt, und CBA $+$ DBA $>$ CBD (336); so ist nun aus den nämlichen Beobachtungen beim Körperecke D, auch CDA $+$ BDA $>$ CDB; und beim Körperecke C, ist DCA $+$ BCA $>$ DCB; aber CBD $+$ CDB $+$ DCB $=$ 180° (104), folglich die Seitenecke der gedachten drei Körperecken so addirt, daß alles rechter, und alles linker Hand zusammen komme, so ist gewiß CBA $+$ DBA $+$ CDA $+$ BDA $+$ DCA $+$ BCA $>$ CBD $+$ CDB $+$ DCB, d.i., die sechs erstern Winkel $>$ 180°. Aber die ersten sechs Winkel liegen mit den drei Winkeln BAC, CAD, DAB, welche die Körperecke A ausmachen, in den drei Dreiecken; und machen daher die neun Winkel dreimal 180° (104). Zieht man die erstern sechs von den neunen ab, so nimmt man mehr, als 180° weg; daher bleiben

für

für die drei BAC; CAD; DAB weniger, als zweimal 180°, d. i., weniger, als 360° übrig.

§. 340. Zusatz. Wenn die Körperecke aus mehr, als drei Seitenecken zusammengesetzt ist, so ist der Satz noch wahr.

Gesetzt es wären die in (338) genannten vier Winkel. Es lassen sich unstreitig die Schenkel aller Seitenecken mit einer Ebene cfed schneiden; weil, wenn die Ebene nicht durch A, als den gemeinschaftlichen Punkt aller Linien geht, diese Linien alle auf der Ebene aufgerichtet stehen (292). Diese schneidende Ebene ist bei vier Seitenecken ein Viereck, welches seine Grenz- oder Winkelpunkte in f, e, d, c hat. Und so erhielte man vier Dreiecke aus den Seitenecken, deren Winkel unstreitig 4mal 180° haben. Acht dieser Winkel stehen an der Ebene cdef; aber die Körperecken in d; e; f; c bestehen unstritig jede aus einem Winkel, der zur Ebene cdef gehört, und aus zweien von den obigen achten. Die zwei sind allemal grösser, als der eine zur Ebene gehörige; folglich auch die acht grösser, als die vier zur Ebene gehörige. Aber die vier zur Ebene cdef gehörigen machen 2mal 180° (136), folglich machen die acht mehr, als zweimal 180°; die acht müssen von den gedachten zwölfen abgezogen werden, um die vier zu haben, welche die Körperecke ausmachen; aber hiebei wird von viermal 180° mehr, als zweimal 180° weggenommen, und bleiben daher für die, das Körpereck ausmachenden Seitenecken weniger, als zweimal 180°. Man sieht leicht, daß sich dieses Exempel von vier Seitenecken auf jede beliebige Zahl anwenden lasse.

§. 341.

§. 341. Zusatz. Keine Seitenecke kann ein Winkel von 180° seyn; denn wäre sie das, so müßten die andern Seitenecken weniger, als 180° machen; und doch müßten diese andern größer, als die eine seyn (338), und so führten die Schlüsse auf Ungereimtheiten; auch erhellet dieses daraus, weil 180° auf eine gerade Linie fallen (36), und eine gerade Linie doch wohl nicht in einem Punkte, nämlich hier in dem Punkte des Körpereckes, liegen kann. So wird hieraus, und aus (340) das in (333) Gesagte, bewiesen.

§. 342. Zusatz. Man nennt Körperecken gleich, wenn sie aus einzelnen gleichen, in einerlei Ordnung auf einander folgenden Seitenecken zusammen gesetzt sind.

§. 343. Erklärung. Man errichte an den Winkelpunkten einer geradlinigten ebenen Figur ABCDE fig. 137 lauter Parallelinien Aa, Bb, u. s. w.; man lege durch diese Linien in einer beliebigen Entfernung von ABCDE eine Ebene abcde parallel mit jener, so entsteht, wenn man zwischen den gedachten Linien Ebenen annimmt, ein eingeschlossener Raum, der seine Ausdehnung nach allen Seiten hat (Körperraum); und die Figur dieses eingeschlossenen Raumes heißt ein Prisma (Ecksäule). Die Figur ABCDE und abcde heißen die Grundflächen. Die Ebenen zur Seite, die zwischen Paaren der aufgerichteten Linien statt haben, heißen die Seitenflächen des Prisma.

§. 344. Lehrsatz. I. In dem eben beschriebenen Körper sind die Seitenflächen, die zwischen Paaren der gedachten Parallellinien und einer obern und untern Seite eingeschlossen sind, Parallelo-

gram-

gramme, und zwar so viele, als die Grundfläche Grenzseiten hat.

II. Die in der obern parallelen Ebene entstandene Figur abcde ist der untern ABCDE gleich und ähnlich.

III. Die Linien an den Seitenparallelogrammen (Seitenlinien des Körpers) sind alle gleich.

Beweis. I. Weil die obere Ebene mit der untern Grundfläche parallel geführt ist, so liegen die Grenzlinien in der obern und untern Grundfläche, wie sie mit einerlei Buchstaben bezeichnet sind, parallel; weil sie in der nämlichen Ebene mit den parallelen Seitenlinien, und noch über dieses in parallelen Ebenen liegen (324). Daher sind die Seitenflächen Parallelogramme (114). Es entsteht aber bei jeder Grenzseite der Grundfläche ein solches Parallelogramm; weil das Gesagte von jeder Grenzseite gilt.

II. Wegen dem Grunde in I liegen die Schenkel der Winkel in der obern und untern Figur parallel; diese Winkel sind daher gleich (313); aber auch die Seiten dieser Figuren (I), daher werden sie einander decken (§ 9).

III. Wegen I ist Aa = Bb (118); aber aus oben dem Grunde ist auch Bb = Cc; und Cc = Dd, u. s. w.

§. 345. Zusatz. I. Ebene Schnitte im Prisma, die mit den Grundflächen parallel geführt werden, geben Figuren, die diesen Grundflächen gleich und ähnlich sind; weil der Beweis für II keine bestimmte Entfernung dieser Schnitte fodert.

II.

II. Daher bringt jeder Schnitt ein anderes Prisma aus dem vorigen, d. h., jeder parallele Schnitt theilt das Prisma in prismatische Stücke.

§. 346. Zusatz. Werden die Linien Aa, Bb u. s. w. auf der Grundfläche senkrecht errichtet (sie stehen alsdann auch senkrecht auf der obern Grundfläche) (327), so heißt das Prisma ein senkrechtes, auch gerade stehendes, sonst schief stehend. Beim ersten sind die Seitenflächen lauter Rechtecke, im letzten sind wenigstens einige Rauten. Ist die Neigung eines Seitenparallelogrammes gegen die Grundfläche so, daß seine zwo Grenzseiten (die nämlich zwischen den Grundflächen errichtet sind) auf den Grenzseiten der Grundflächen senkrecht stehen, so ist es ein Rechteck; allein die Fälle, bei welchen das eintreffen müße, anzugeben, verlohnte der Mühe nicht.

§. 347. Zusatz. Ist die Grundfläche ein Parallelogramm, wie ABCD in der 138ten Figur, sonst alles, wie oben, so sind die Seitenparallelogramme Bc und Ad; im gleichen Cd und Ba, welche gegen einander über liegen, parallel; denn in den beiden ersten sind BC parallel AD, und Aa par. Bb; daher diese Ebenen, worinn die gedachten Linien liegen, parallel (332). Eben so wird die Sache von den Parallelogrammen Cd und Ba bewiesen.

§. 348. Prismata, wie die im nächsten Zusatze, heißen Parallelepipeda (Paralleleckfäulen), und in ihnen sind auch die gegen über stehenden Parallelogramme gleich und ähnlich (344).

§. 349. I. Stehen die Seitenlinien im Parallelepipedum senkrecht auf den Grundflächen, so stehen auch die Seitenparallelogramme senkrecht auf ihnen (309), und diese Seitenparallelogramme sind Rechtecke (112). Ist die Grundfläche auch ein Rechteck, so ist das Parallelepipedum in sechs Rechtecke eingeschlossen. Es ist daher auch gerade stehend (346).

II. Ist unter den Umständen in (I) die Grundfläche ein Quadrat, auch die Seitenlinien Bb = BC, (und so verhält es sich nun mit allen Seitenlinien), so ist das Parallelepipedum ein Würfel; folglich ist der Würfel in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen. Die Körperecke des Würfels besteht aus drei gleichen Seitenecken, jede = 90°.

§. 350. Zusatz. Aus (345) folgt, daß unzählig viele Schnitte (also Schnitte in unendlich naher Entfernung) nur parallel mit der Grundfläche geführt, diese Grundfläche immer hervorbringen. Man kann sich also vorstellen, die Grundfläche habe sich bei der Entstehung des Prisma in paralleler und solcher unverrückten Lage bewegt, daß jede Grenzlinie an ihr ein Parallelogramm beschrieb. Wenn aber bei dieser Bewegung drei Punkte in der Grundfläche, die nicht in einer geraden Linie liegen, gerade Linien, oder (welches auf eben das herauskömmt) drei Parallellinien beschreiben, so thun es alle Punkte der gedachten Grundfläche (296).

§. 351. Erklärung. In der 139ten Figur sey ABP ein Kreis, in dessen Mittelpunkte C eine Linie Cc in beliebiger Neigung gegen die Kreisfläche errichtet ist. Man lege eine Ebene

durch C c in einer willkürlichen Entfernung, nur parallel mit der untern Kreisfläche. In dem Umfange des untern Kreises werden aus Punkten A, B Linien Aa, Bb mit C c parallel errichtet, die die obere Ebene erreichen; so werden a, b, u. s. w. Punkte in einem Kreise seyn, der in c seinen Mittelpunkt hat. Denn A C par. ac (324) und A C c a ein Parallelogramm (114) und A C = ac; eben das gilt von B C und b c; folglich A C = B C = ac = b c; und so von allen Linien, die aus Punkten des untern zu Punkten des obern Umfanges a b p gezogen werden. Die Linien A a, B b u. s. w. liegen in einer Fläche, die um die beiden Kreise angelegt ist; sie kann keine Ebene seyn, und ist daher krumm, und zwar überall gegen die C c hohl. Dieser so eingeschlossene Körper heißt: Cylinder (Rundsäule; Walze), die Linie C c die Achse des Cylinders; die krumme Fläche: Seitenfläche, die beiden Kreise seine Grundflächen. Ist die Achse senkrecht, wie K k in der 140ten Figur, und folglich alle Linien A a, B b, u. s. w. daselbst, so heißt der Cylinder gerade, sonst schief.

§. 352. Zusatz. Schnitte im Cylinder parallel mit den Grundflächen geführt, geben Kreisflächen, wenn die Grundflächen solche sind (345); sonst doch ähnliche Flächen.

§. 353. Zusatz. Würde sich die Kreisfläche A B P an der Achse parallel hin bewegen, so entstünde auch der Cylinder, nach eben der Art, wie in (350); nur, weil alle Punkte im Kreise gegen den Mittelpunkt auf die nämliche Art liegen, so würde es hier nicht einmal nöthig seyn, daß die Punkte der Grundfläche gerade Linien beschreiben.

§. 354.

§. 354. Zusatz. Im senkrechten Cylinder ist AKka ein Rechteck (112), und Aa = Bb (326), d. i., Aa kann alle senkrechte Linien in der krummen Fläche vorstellen; folglich, das Rechteck AKka um die feststehende Kk gedreht, wird auch den Cylinder hervorbringen; oder, den cylindrischen Raum durchlaufen.

§. 355. Zusatz. In der 139ten Figur sey AB, und daher auch ab unendlich klein; so kann man dieses Kreistheilchen für gerade (241) und ABab als ein unendlich schmales, ebenes Parallelogramm annehmen. Dieses Parallelogramm ist dann entweder auf den beiden Grundflächen senkrecht oder schief, nachdem Aa senkrecht oder schief darauf ist; folglich ist der Cylinder als ein Prisma von unzählig vielen Seiten anzusehen.

§. 356. Erklärung. Aus einem Punkte G. fig. 141, außerhalb einer geradlinigten Figur ABCDEF werden an die Winkelpunkte dieser Figur gerade Linien AG; BG; CG; u. s. w. gezogen, welche mit den Grenzseiten der Figur eben so viele ebene Dreiecke einschließen, als die Figur Seiten hat. Der auf diese Art eingeschlossene körperliche Raum heißt Pyramide (Spitzsäule); die Ebene Figur, auf welcher die gedachten Dreiecke stehen, heißt: die Grundfläche, die Dreiecke, die Seitenflächen der Pyramide.

§. 357. Zusatz. Ist die Grundfläche ein Zirkel, wie ABD fig. 142, und man zieht aus unendlich nahe liegenden Punkten (dergleichen B, D ein Paar seyn sollen) nach E, Linien, so entsteht eben so, wie oben, eine Pyramide, deren Seitenfläche aus unendlich vielen, aber unendlich schmalen

len Dreiecken zusammen gesetzt ist. Man heißt diese Art Körper: Kegel. Eine Linie CE aus dem Mittelpunkte des Zirkels in die Spitze E heißt die Axe des Kegels. Steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht, wie etwa CD in der 120ten Figur, so heißt der Kegel gerade, steht sie schief, so heißt der Kegel schief.

§. 358. Zusatz. Wie (304) erwiesen, so sind alle rechtwinklichte Dreiecke im geraden Kegel, die zu Katheten die Axe, und den Halbmesser des Grundkreises; zur Hypothenuse aber die Seite des Kegels haben; gleich und ähnlich. Es ist daher auch klar, daß das eine und das nämliche △ in allen obigen Lagen passen und angetroffen werde. Wenn daher ein rechtwinklichtes Dreieck DCA, fig. 120. um einen seiner Katheten CD, als um eine feste Axe, gedreht wird, so durchläuft dessen Fläche den Körperraum des Kegels, und die Hypothenuse AD beschreibt des Kegels Seitenfläche. Der andere Kathet AC beschreibt die Grundfläche des Kegels, welche, weil AC immer in der nämlichen Ebene bleibt (301) eine Kreisfläche wird (§29). Und da AC in andern Punkten der CD senkrecht seyn kann, so begreift man, daß jede Linie auf CD senkrecht, und bis an AD verlängt, mit dem Punkte, den sie in AD hat, einen Kreis beschreibet.

§. 359. Zusatz. Daß die Seitenfläche krumm sey, folgt sowohl aus dieser Beschreibung, weil die Hypothenuse in jedem Augenblicke eine andere Richtung nimmt, als auch aus (304).

§. 360. Zusatz. Die Grundfläche ABCDEF der Pyramide in der 143ten Figur sey ein reguläres

res

res Vieleck, in dessen Mittelpunkte G (140, III) die senkrechte GH errichtet ist, aus deren einem Punkte H die Seitenlinien AH; HB u. s. w. gezogen sind; diese sind aus dem Grunde, wie in (358) alle gleich.

Eine Ebene an GH so gelegt, daß ihr Schnitt Gm, den sie in der Grundfläche macht, in die Mitte der Seite BC eintrift, und das Seitendreieck BHC der Pyramide in Hm schneide, bestimmt die Schenkel des Winkels GmH, welcher der Ebenen Winkel ist (307); denn Gm ist senkrecht auf BC (140, I), aber auch Hm (86, II). Legt man auf die Mitte jeder Grenzseite solche Ebene, wie GHm, so erfolgen gewiß immer die nämlichen Einschnitte; aber die Einschnitte würden rechtwinklichte Dreiecke bilden, wie GHm eines ist, die alle gleich und ähnlich sind; weil sie alle GH zu einem, und Linien, wie Gm (die alle gleich sind) (140, I), zum andern Kathet haben; in ihnen allen ist also der Winkel, der von Gm und Hm gebildet wird, gleich; dieses ist aber der Ebenen Winkel (307); folglich haben die Seitendreiecke dieser Pyramide gleiche Neigung zu der Grundfläche. Diese Pyramide heißt gerade, und sonst keiner kann dieser Name mit Rechte zukommen. Aus dieser Pyramide wird der gerade Kegel, wenn die Seiten an der Grundfläche unendlich klein werden.

§. 361. Zusatz. I. Ist die Figur irregulär, so fehlen nicht nur die Gründe zu den obigen Schlüssen, sondern es läßt sich auch erweisen, daß die Seitendreiecke andere und andere Ebenenwinkel mit der Grundfläche machen. Es seyen in einem Kreise

mehrere gleiche und einige ungleiche Sennen gezogen; so wird wohl aus solchen Sennen eine irregulare Figur entstehen. Die ungleichen Sennen seyen kleiner, sonst alles, wie oben, so werden die Gm auf sie größer (178, IV); folglich bei ihnen ∢ GHm größer, als bei den gleichen Sennen (85, II), und daher ∢ GmH kleiner bei den kleinern Sennen (108, IV), und so sind die Seitendreiecke, die die kleinern Sennen zu Grundlinien haben, mehr gegen die Grundfläche geneigt, als die, welche gleiche Sennen zu Grundlinien haben. Sind die ungleiche Sennen größer, so sind die gedachten Seitendreiecke weniger geneigt, als die, der gleichen Sennen.

II. Bei andern irregulären Figuren, die die Grundflächen zu Pyramiden abgeben, und die lauter auswärtsgehende Winkel haben (bei denen, die einwärtsgehende Winkel haben, fällt die Sache von selbst weg, weil kein Perpendikel aus einem in der Fläche angenommenen Punkte zwischen den Grenzpunkten der Schenkel, oder wenigstens eines Schenkels des einwärtsgehenden Winkels möglich ist, indem dieser Winkel mehr, als 180° beträgt), ist die Sache auch klar. Denn von einem in der Fläche angenommenen Punkte soll es zwar auf jede Grenzseite ein Perpendikel geben, aber weil die Grenzseiten nicht alle gleichweit von diesem Punkte abstehen, so sind diese Perpendikel ungleich (84), und folglich trift das in I Gesagte auch hier ein.

§. 362. Lehrsatz. Jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt a b c d e f fig. 141 in der Pyramide bringt eine, der Grundfläche ähnliche Figur, hervor.

Beweis. Weil die Grenzlinien, sowohl des Schnittes, als der Grundfläche, in den Seitendreiecken der Pyramide und doch in parallelen Ebenen liegen, so sind die in jedem solchen Dreiecke liegenden Linien (dergleichen AB; ab u. s. w. sind) parallel (324); daher sind die Winkel im Schnitte, die von zweien seiner Grenzlinien entstehen, den Winkeln in der Grundfläche gleich, die von zweien solchen, den ersten parallelen Linien gebildet sind (313), oder $\sphericalangle$ fab = $\sphericalangle$ FAB; $\sphericalangle$ abc = $\sphericalangle$ ABC, u. s. w.

Ferner ist Ga : GA = Gb : GB = Gc : GC = Gd : GD u. s. w. (⊙) (330). Aber auch, in den △ △ Gab; GAB ist Ga : GA = ab : AB, und in den △ △ Gbc; GBC ist Gb : GB = bc : BC; und so in den folgenden △ △ Gc : GC = Cd : CD; Gd : GD = de : DE u. s. w. Aber in diesen einzelnen Proportionen sind wegen (⊙) die ersten Verhältnisse gleich; folglich auch die letzten; daher ist ab : AB = bc : BC = cd : CD = de : DE u. s. w. Die Figur im Schnitte und die Grundfläche haben also die Eigenschaft, die in (218) zur Aehnlichkeit gefodert wird.

§. 363. Zusatz. Bei dem geraden Kegel sowohl, als bei dem schiefen, bringt der parallele Schnitt eine Zirkelfläche, wenn die Grundfläche ein solcher war (257).

§. 364. Erklärung. Die halbe Kreisfläche BADB fig. 144 drehe sich um ihren Durchmesser AB, wie um eine feststehende Axe, so wird sie einen Raum durchlaufen, der von einer, vom Halbkreise beschriebenen krummen Fläche eingeschlossen

 ist.

ist. Dieser so begrenzte Raum heißt eine Kugel (sphæra).

§. 365. Zusatz. CD sey ein auf AB senkrechter Halbmesser, also AD ein Quadrant, und überhaupt der Ausschnitt CDA ≅ dem Ausschnitte CBD; folglich werden beide Quadrante bei der obigen Bewegung zwei übereinstimmende Kugelstücke beschreiben, die die ganze Kugel ausmachen; wovon also jedes eine Halbkugel ist.

§. 366. Zusatz. Der Mittelpunkt des Halbkreises bleibt bei der obigen Bewegung an seiner Stelle; und behält zu allen Punkten der Kugelfläche eine gleichentfernte Lage, daher er auch der Mittelpunkt der Kugel heißt; Linien von ihm an der Kugeloberfläche, (Halbmesser der Kugel) sind alle gleich; ingleichen die Durchmesser der Kugel.

§. 367. Zusatz. I. Jede Linie xm auf dem feststehenden Durchmesser senkrecht, beschreibt eine Kreisfläche, wovon sie der Halbmesser ist; denn xm ist in jeder andern Lage, die sie beim Herumdrehen erhält, senkrecht auf der unverrückten AB, und fällt daher immer in die nämliche Ebene (301), und x bleibt an einer Stelle.

II. Je weiter diese xm (halbe Sennen des gedachten Halbkreises) (128), von C entfernt liegen, desto kleiner sind sie (178, III), folglich die Kreise und die Kreisflächen von ihnen.

§. 367. Lehrsatz. I. Wenn mit einer Ebene DM fig. 145 eine Kugel geschnitten wird, und man läßt eine senkrechte Linie aus der Kugel Mittelpunkte C auf diese schneidende Ebene, so fällt sie auf die Fläche des Schnittes innerhalb der Kugel.

II.

II. Die Fläche des Schnittes DFEK ist ein Zirkel, und die gedachte senkrechte Linie fällt in den Mittelpunkt H dieses Kugelschnittes.

Beweis. Fällt die senkrechte Linie nicht in die Fläche des Kugelschnittes, so falle sie außer derselben; wie CG; so, daß G außer der Kugel liege. Man lege eine Ebene durch CG so, daß sie die Ebene des Kugelschnittes schneide, und verlänge den Schnitt, welchen diese eingelegte Ebene nothwendig auf DM macht (die Linie dieses Schnittes heiße S.; sie ist, Undeutlichkeit zu vermeiden, in der Figur nicht verzeichnet), so ist folgendes wahr: Die Ebene durch CG steht auf DM senkrecht (309, I), folglich ist CG auf S. senkrecht (309, II), und CG die möglichst kürzeste Linie auf S. (82, I). Aber aus C Linien auf Punkte des Theiles von S., der innerhalb der Kugel liegt, sind kleiner, als CG, weil diese Punkte innerhalb der Kugel, und daher näher an C liegen, als G (§ 30), folglich kann CG nicht die senkrechte Linie seyn. Aber auch kann die senkrechte Linie nicht in die Grenze m des Schnittes fallen; weil sie da ihren Endpunkt in der Oberfläche der Kugel hätte, und Cm muß aus eben den obigen Gründen größer, als die senkrechte aus C auf den Schnitt seyn.

II. Es sey nun CH die senkrechte aus C auf den Kugelschnitt. Aus H ziehe man verschiedene Linien HD; HF; Hm; HE, u. s. w. an die Grenze des Schnittes, so liegen D, F, m; E, in der Kugelfläche, und die Halbmesser CD, CF, Cm, CE bilden rechtwinklichte Dreiecke mit den gedachten Linien, und mit CH; diese △△ sind übereinstimmend (58), folglich HD = HF = Hm = HE;

 da-

daher ist H der Mittelpunkt der Kreisfläche, die von der schneidenden Ebene hervorgebracht wird.

§. 369. Zusatz. Wenn der Schnitt nicht durch den Mittelpunkt der Kugel selbst geht; so hat CH eine gewisse Länge, und HD, HF u. s. w. sind kleiner, als der Halbmesser. Der Schnitt durch den Mittelpunkt giebt CH = o; und HD = CD = HF u. s. w.; folglich bringt der ebene Schnitt, durch der Kugel Mittelpunkt, den größten Zirkel; die übrigen sind nämlich alle kleiner. Aber wenn CH abnimmt, d. i., wenn der Schnitt näher am Mittelpunkte geschieht, so müßen, weil in den gedachten rechtwinklichten Dreiecken CD, CF u. s. w., oder die Hypothenusen einerlei bleiben, HD, HF, oder die Halbmesser der Kreisfläche im Schnitte größer werden (178), und daher sind die Kreisflächen der Schnitte größer, je näher sie am Mittelpunkte liegen.

Vom den regulären Körpern.

§. 370. Erklärung. Reguläre Körper sind solche, deren Seiten und Grundflächen gleiche und reguläre Flächen sind, und deren Körperwinkel alle gleich sind.

§. 371. Anmerk. Um einigermaßen einzusehen, wie viele reguläre Körper möglich sind, muß man die Umstände erwägen, unter denen aus den Winkeln der regulären Vielecke Körperwinkel entstehen können. Soll der Körper von regulären Dreiecken umschlossen werden, und man nimmt drei solcher Winkel zum Körperwinkel (denn drei müßen es zum wenigsten seyn) (335), so wird der Körperwinkel = 3. 60° = 180°, folglich möglich.

Die=

Dieser Körper ist die reguläre Pyramide (Tetrádron); sie ist von vier gleichseitigen Dreiecken umschlossen, und hat vier gleiche Körperwinkel.

Vier solcher Winkel geben den Körperwinkel = 4. 60° = 240° möglich. Der Körper erhält zu allen Seitenflächen acht gleichseitige Dreiecke; und acht solcher Körwinkel (Oktádron). Man kann ihn sich so vorstellen: Wenn man ihn spaltet, daß der Ebene Schnitt durch die Mitte von vier Körperwinkeln gehe, so erhält man zwo gerade Pyramiden, die ihre Grundflächen, welche Quadrate sind, in diesem Schnitte haben.

Fünf solcher Winkel geben den Körperwinkel = 5. 60° = 300°, also wieder möglich. Der Körper erhält zwanzig gleichseitige Dreiecke zu Grenzflächen, und eben so viele Körperwinkel, und heißt Zwanzigeckkörper (Ikosádron).

Aus sechs Winkeln vom gleichseitigen Dreiecke = 6. 60° = 360° ist der Körperwinkel nicht mehr möglich (340). Sollen die Seitenflächen Quadrate seyn, so ist aus deren 3 Winkeln der Körperwinkel = 3. 90° = 270° möglich. Dieser Körper ist der Würfel (cubus); er ist von 6 Quadraten umschlossen, und hat eben so viele Körperecken. Aus vier solcher Winkel ist der Körperwinkel nicht mehr möglich; daher giebt es nur den einen regulären Körper, der zu Grenzflächen Quadrate hat.

Im regulären Fünfecke ist der Winkel = 108°; also aus ihrer drei die Körperecke = 3. 108° = 324 möglich. Der Körper erhält zwölf solcher Seitenflächen, und zwölf der gedachten Körperecke, und heißt: Dodekádron. Aus vier solcher Winkel ist kein Körperwinkel möglich.

Im regulären Sechsecke ist der Winkel = 120°, daher würde aus dreien die Körperecke = 3. 120 = 360° seyn müßen, welches aber nicht seyn kann (240); daher giebt es keinen regulären Körper, der in regulären Sechsecken eingeschlossen wäre. Von folgenden regulären Vielecken werden die Körperwinkel immer mehr unmöglich.

Das

Das eben Gesagte läßt freilich noch die Dunkelheit unaufgehellet, warinn, wenn der reguläre Körperwinkel möglich ist; denn eben so viele reguläre Umfangsflächen erfodert werden.

Ferner wie solche Körper in Kugeln beschrieben und ihre Ecken alle in der Kugelfläche liegen haben. Und überhaupt ist begreiflich, daß es noch mehrere geometrische Eigenschaften an diesen Körpern zu untersuchen gebe. Diese Untersuchungen haben in der Mathematik zu geringen Nutzen, als daß sie mit eben der Vollständigkeit, wie das bisherige, gemacht würden.

Wer aber ja nähere Belehrung verlangt, der darf nur die drei oder fünf letzten Bücher des Euklid mit der gehörigen Aufmerksamkeit lesen. Auch hat Kästner in verschiedenen Abhandlungen die Sache untersucht; sie sind in den Comment. societat. scient. Gœtting. eingerückt, und fangen in Tom. VI. ad 1783. 1784 an, und gehen in den zween nächst folgenden Bänden fort. Karsten im II. Bande des mathem. Lehrbegriffes. Aus diesen Authoren Vortrage erhellet, daß hier die Sache nicht einmal ausführlich könne vorgetragen werden.

§. 372. **Anmerk.** Sowohl für die regulären Körper, als für die noch folgenden Untersuchungen ist es sehr zu rathen, Modellen zu haben; sie können aus Pappen zusammengesetzt seyn; wenn die Stücke nur nach richtiger Zeichnung geschnitten sind.

Diese Stücke, die eigentlich die Oberflächen des Körpers ausmachen, heißen das Netz des Körpers; und die richtige Kenntniß von diesen Oberflächen giebt die Regeln zu ihrer Zeichnung. In **Wolfs** Anfangsgründen, und beim Sargeneck findet man Anweisungen, sie zu zeichnen, und auszuschneiden.

Von der Gleichheit der Körper.

§. 373. **Grundsatz.** Wenn Körper in allen ihren Grundflächen zusammenfallen, so schließen sie

den

den nämlichen Raum ein, und man kann sagen, sie decken einander, und sind daher gleich und ähnlich.

§. 374. Erklärung. Die Höhe eines Prisma ist die senkrechte Linie zwischen beiden Grundflächen; die Höhe einer Pyramide ist die senkrechte Linie von der Spitze auf die Grundfläche. In beiden Körpern nämlich will man wissen, wieweit die gedachten Dinge von den Grundflächen abstehen, welches durch die senkrechten Linien angegeben werden muß (303, II, 326). Bei geraden prismatischen Körpern ist daher eine jede Seitenlinie für die Höhe zu nehmen.

§. 375. Lehrsatz. Prismata, die nebst gleichen Höhen auch noch gleiche und ähnliche Grundflächen haben, und deren ähnlich liegenden Seitenflächen gegen die Grundfläche und unter sich einerlei Ebenen Winkel machen, sind gleich.

Beweis. Setzt man ihre unterste Grundflächen auf einander, so decken sich diese; aber auch wegen der Gleichheit der Winkel, die die Seitenflächen mit der Grundfläche machen, fallen auch diese Seitenflächen aufeinander (329). Die obern Grundflächen fallen wegen gleicher Höhe aufeinander; und ihre Grenzlinien, die zu den Seitenparallelogrammen gehören, fallen deswegen aufeinander, weil die Parallelogramme selbst aufeinander liegen; daher decken solche Prismata einander, und sind gleich (373).

§. 376. Zusatz. Weil die Seitenlinie des Würfels zugleich seine Höhe ist; so sind Würfel gleich, die einerlei Seitenlinie haben. Ein Würfel

fel von einer größern Seitenlinie ist daher größer, weil er den von der kleinern Seitenlinie in sich einschließt, und noch einen Raum darüber.

§. 377. Lehrsatz. Prismata, wie die obigen, nur von ungleichen Höhen, verhalten sich in ihrer Größe, wie ihre Höhen.

Beweis. Es seyen die beiden Prismata AB; und MH fig. 146; wo man itzt im letztern die Ebene KL, wie noch nicht vorhanden, annehme.

Die Grundfläche des erstern sey AFED ≅ der Grundfläche HGIC des zweiten. Die Höhe des erstern ist wx; die des zweiten xz.

Ich nehme an, sowohl wx, als xz lasse sich mit yz ausmessen, so daß $wx = m.yz$ und $xz = n.yz$ sey, wo m, n, ganze Zahlen sind.

Man schneide mit einer Ebene KL parallel mit der Grundfläche, und in der Entfernung = yz von derselben, so schneidet diese Ebene ein Prisma KH in dem einen BC ab (345); und es werden so viele solcher übereinstimmender Prismata in BC entstehen (375), als vielmal man in der Weite yz einschneiden kann; folglich n Prismata. Da sich aber auf die nämliche Art solche Einschnitte in AB machen lassen, so erhält man m Prismata in AB, die einzeln mit denen in BC übereinstimmen (375); folglich ist Prisma AB : Prisma BC = $m.KH : n.KH = m : n = m.yz : n.yz = wx : xz$.

§. 378. Zusatz. Wegen (330) ist $wx : xz = DM : MC$ u. s. w.; folglich verhalten sich die Prismata von gleicher Grundfläche auch, wie die ähnlich liegenden Seitenlinien in ihnen. Ich nenne aber

aber ähnlich liegende Seitenlinien solche, die mit der Grundfläche sowohl, als mit ähnlichen Seitenlinien an ihr einerlei Winkel machen.

§. 379. Zusatz. Wenn wx und xz nicht zugleich mit yz ausmeßbar sind, so gilt hier alles, was (195) gesagt ist, und folglich ist der Satz (377) allgemein wahr.

§. 380. Lehrsatz. Parallelepipeda von gleichen Höhen; von gleichen und ähnlichen Grundflächen sind gleichen Inhaltes, wenn auch ihre Seitenflächen verschiedene Neigungen zu den Grundflächen haben.

Beweis. Die Parallelepipeda seyen GB das erste, und CK das zweite in der 147ten Figur. Sie haben die Grundfläche ABCD gemein, und ihre andere Grundflächen liegen in der Ebene GK, die mit der untern Grundfläche parallel ist. Nun sind zween Fälle möglich: es können entweder ein Paar gegenüber liegenden Seitenparallelogramme beider Körper in einer Ebene liegen, oder nicht.

Erster Fall. Das Seitenparallelogramm CGHD des ersten, und das Seitenparallelogramm CLMD des zweiten sollen in einer Ebenen GDM liegen; imgleichen werden nun AEFB und AIKB in eine Ebene fallen (348). Die Linie CL muß die Linie DH irgendwo in O, imgleichen AI die BF, etwa in N schneiden, weil das erste Paar Linien zwar in einer Ebene, aber nicht parallel sind, eben so vom zweiten Paare (99, I); aber ON par. GA (324, I); auch ist ON parallel DB, und folglich auch parallel mit MK, und LI (312); daher giebt es folgende Parallelogramme, die alle ON

zur Seite haben. CANO, welches innerhalb des ersten Parallelepipedum liegt, und ONLI; dieses mit dem ersten sind aus der Seitenfläche CALI des zweiten Parallelepipedum entstanden; ferner DBNO und ONFH, welche beide aus der rechten Seitenfläche des erstern Parallelepipedum entstehen.

Zur nähern Erläuterung der Figur und Sache wird noch angemerkt, daß EGMK ein ebenes Parallelogramm sey; denn die Linien GE; HF; ingleichen LI; MK in ihm sind parallel, das fodert die angenommene prismatische Gestalt (344), und sie sind alle gleich (114); imgleichen ist GH = EF = IK = LM.

Die Linie AI liegt mit dem Parallelogramm AF in einer Ebene, weil sie die Punkte A und N im gedachten Parallelogramme hat (292), und so liegt BK auch in dieser Ebene; aber EK fällt auch in diese Ebene, weil sie E, F, I, K in der nämlichen Ebene hat; ich will sie die vordere Ebene heißen. Die Linie GM liegt mit GC und HD, imgleichen mit CL und DM in einer Ebene (hintere Ebene); beide Ebenen, die vordere und hintere sind parallel (332).

In der vordern ist △ AEI ≅ △ BFK (66), desgleichen in der hintern △ GCL ≅ △ HDM; aber auch diese vier Dreiecke sind aus den nämlichen Gründen unter sich gleich. Man hat daher zwei dreieckigte Prismata, nämlich AIEGCLID; und BKFHDMK; diese werden einander decken, weil ihre dreieckigte Grundflächen es thun; und die Ebenen Winkel, die sowohl ihre Seitenparallelogramme mit einander machen, als auch die diese

Seitenflächen mit den Grundflächen mit einander machen, sind gleich.

Der Grund der Gleichheit dieser Winkel ist, weil jedes Paar Ebenen, die einen Winkel bilden, mit dem Paare, welche den andern Winkel bilden, parallel liegt; wie dieses die Gestalt der angenommenen Parallelepipeden fodert; und daher diese Ebenenwinkel wegen (328) gleich sind. So ist der Ebene Winkel, der seinen Scheidel in GE hat (er wird vom Parallelogramm AG und GK gebildet) dem gleich, der seinen Scheidel in HF hat; eben so ist der Winkel, dessen Scheidel in CA ist (von AG und CI gebildet) dem gleich, der seinen Scheidel in DB hat (von HB und BM gebildet).

Ferner werden die vordere und hintere Ebene von den parallel liegenden Parallelogrammen GA und HB, desgleichen von AL und BM geschnitten, und entstehen daher von den genannten Parallelogrammen mit den vordern und hintern Ebenen gleiche Winkel; folglich ist Prisma AIEGCLG ≅ Pris. BKFHDM (375). Von ihnen nehme man das gemeinschaftliche Prisma NIFHOLI weg, so bleiben zwei gleiche prismatische Körper übrig; wovon der erste zur untern Grundfläche COHG; der andere ODML hat; die Seitenparallelogramme des erstern sind GA; AO; NH; HE und des andern OI; OB; BM; LK.

Das Stück, welches durch die Ebene CN vom erstern Parallelepipedum, und durch die Ebene OB vom zweitern abgeschnitten wird, ist auch ein dreieckigtes Prisma; dessen Grundflächen die übereinstimmenden △△ CDO; ANB sind; seine Seitenparallelogramme sind schon oben angegeben.

Dieses Prisma CN nun zu den genannten gleichen prismatischen Körpern gesetzt, läßt sie noch gleich, und ergänzt beide Parallelepipeda: welche daher gleich sind.

Zweiter Fall. Das Parallelepipedum GB in der 148ten Figur sey das erste, und daselbst MDAI das zweite.

Das vordere Seitenparallelogramm AEFB des ersten macht mit der gemeinschaftlichen Grundfläche einen andern Ebenenwinkel im Scheidel AB, als das vordere Parallelogramm ABKI des zweiten Parallelepipedum; und so ist es mit den hintern Seitenparallelogrammen; daher fallen diese Parallelogramme nicht in eine Ebene. Zur Erläuterung sollen die gedachten Parallelogramme des zweiten Körpers so liegen, daß dessen vorderes Parallelogramm mit der Grundfläche einen spitzern Winkel mache, als das vordere des ersten Körpers mit der gedachten Grundfläche.

Man verlänge die zwo Seitenlinien EF und GH der obern Grundfläche des ersten Körpers. Nothwendig bleiben diese verlängten Linien in der Ebene, worinn die obern Grundflächen beider Körper liegen. Die Verlängung von GH schneidet in S und T die Seitenlinien LI und MK der obern Grundfläche des zweiten Körpers; und werden nun auch diese LI und MK verlängt, so werden diese verlängten LI, MK von der auch verlängten EF in V und W geschnitten. Und weil GT parallel CD; parallel LM; so ist auch ST parallell LM; das nämliche gilt von VW parallel IK. Auch ist SV = HF (115, I) = DB = LI = TW = MK. Aus dem nämlichen Grunde ist LM = ST = IK = VW;

folg-

folglich LMKI $\cong$ STWV, weil beide gleiche Seiten und Winkel haben (234).

Würde man von S in C; von T in D; von V in A; von W in B Linien ziehen, so entstände ein drittes Parallelepipedum; weil diese gezogene Linien Seiten an Parallelogrammen seyn werden (§. 117).

Um Verwirrung zu vermeiden, sind diese Linien nicht gezogen; allein weil AB und EW in einer, eben so CD und GT in einer Ebene liegen; so liegt gewiß die vordere Seitenfläche des dritten Körpers mit der des ersten in einer Ebene, und eben so die hintern Seitenflächen dieser Körper; daher hat das dritte mit dem ersten Parallelepipedum die Eigenschaft, die im ersten Falle, zu der daselbst erwiesenen Gleichheit gefodert ward; folglich sind das erste und dritte Parallelepipedum gleich. Aber dieses dritten Körpers Seitenfläche SVAC liegt mit der Seitenfläche LIAC des zweiten Körpers auch in einer Ebene; weil AC und LV in einer Ebene liegen; von den zwo andern, diesen Seitenflächen gegenüberliegenden, nämlich MKDB; und TWDB gilt eben das; folglich sind auch der zweite und dritte Körper wegen dem Beweise, für den ersten Fall, gleich; und daher ist nun auch das erste Parallelepipedum dem zweiten gleich.

§. 381. Zusatz. Der Beweis setzt keine bestimmte Neigung der Seitenflächen gegen die Grundfläche voraus; daher kann auch ein Parallelepipedum gerade seyn, und das andere schief; wenn sie nur gleiche Höhen (d. i., wenn sie nur ihre Grundflächen zwischen einerlei parallelen Ebenen haben), und gleiche Grundflächen haben.

§. 382. Lehrsatz. Wenn man im Parallelepipedum AG fig. 146 mit einer Ebene BM der Seitenfläche CH oder AE parallel schneidet, so verhält sich das abgeschnittene Parallelepipedum AB zum Ganzen AG, wie die Grundfläche AM des abgeschnittenen zur Grundfläche AC des ganzen Parallelepipedum.

Beweis. Ich nehme an, DC und DM seyen mit KC ausmeßbar, und zwar sey DC = m . KC; DM = n . KC (379). Man kann daher durch jeden Maaßpunkt der DM, und eben so der DC parallele Ebenen wie BM legen, welche in die Grundflächen einschneiden, und daher lauter ähnliche, aber auch gleiche Parallelogramme (234) abschneiden, dergleichen KI eines ist. Es müßen aber m solcher Parallelogramme in AC, und n in AM herauskomen; oder es ist AC : AM = m : n (194). Folglich entstehen bei diesem Verfahren Parallelepipeda, dergleichen KH eines ist, von gleichen und ähnlichen Grundflächen und von gleichen Höhen, weil wohl wegen der angenommenen Gestalt FG parallel AC ist; diese Parallelepipeda sind demnach gleich (375). Im ganzen Parallelepipedum AG erhält man ihrer m; und n in AB; folglich ist AG : AB = m : n = Grundfläche AC : Grundfläche AM.

§. 383. Zusatz. Auch ist AG — AB : AB = Grundfläche AC — Grundfläche AM : Grundfläche AM; d. i. Pppd. MH : Pppd. AB = Grundfläche MI : Grundfläche AM (Rechenk. 352); oder Parallelepipeda von gleichen Höhen, und ungleichen, aber ähnlichen Grundflächen verhalten sich wie die Grundflächen.

§. 384.

§. 384. Lehrsatz. Gerade Parallelepipeda von gleicher Höhe, und gleichen, aber unähnlichen Grundflächen sind von gleichem Inhalte.

Beweis. In der 149ten Figur sey das Parallelepipedum CD mit dem AB der 150 Figur von der genannten Beschaffenheit; so daß die Höhe CI = Höhe EH sey (374), die Grundfläche CM = Grundfläche AF.

Man verlänge die Grundfläche CM, so, bis die Seitenlinien CL, NM Verlängungen erhalten, welche AE gleich werden; also, bis MO = LP = AE sey. Eben so werden IT; KD bis Q und V verlängt; daß die durch PO und mit LD parallel gelegte Ebene PV, diese verlangte Linien treffe; so ist LV ein anderes gerades Parallelepipedum, welches mit CD einerlei Höhe hat. Aber LQ ist ein Rechteck wegen der Annahme, daß das Parallelepipedum gerade, und folglich LT, PQ senkr. auf dem Grunde LO, oder senkrecht auf LP sind; und dieses Rechteck LQ ist dem Seitenrechtecke AH in der 150ten Figur gleich und ähnlich; weil die Winkel und Seiten gleich sind. Man erweitere vorwärts die Linien OP, ML, imgleichen VQ und DT und lege eine Ebene WR, aber mit LQ parallel, und in der senkrechten Entfernung, in welcher AE und GF von einander liegen; so ist WQ ein drittes gerades Parallelepipedum, dessen Grundfläche WP = AF (162); aber beide sind nicht ähnlich.

Nimmt man bei dem Parallelepipedum AB der 150ten Figur das Seitenparallelogramm AH zur Grundfläche; und beim Parallelepipedum WQ die Seitenfläche LQ zur Grundfläche; so ha-

ben diese zwei Parallelepipeda einerlei Grundfläche und Höhe, und sind daher gleich (380).

In dem Parallelepipedum CV ist die Ebene LD parallel mit seinen zwei Seitenparallelogrammen CK und PV; folglich hat man Pppd CD: Pppd. LV = Grundfl. CM: Grundfl. LO (383). In dem Parallelepipedum WV ist die Ebene LQ parallel mit den Seitenflächen; folglich auch Pppd. WQ: Pppd. LV = Grunfl. WP: Grunfl. LO. Aus beiden Proportionen wird Pppd. CD: Pppd. WQ = Grundfl. CM: Grundfl. WP (Rechenk. 361). Nun ist aber erwiesen, daß Pppd. WQ = Pppd. AB; auch ist die Grundfläche WP = Grundfl. AF = Grundfl. CM; daher die gleichen Dinge in die Proportion gesetzt, giebt Pppd. CD: Pppd. AB = Grundfl. CM: Grundfläche AF; aber weil AF = CM; so ist auch Pppd. CD = Pppd. AB.

§. 385. Zusatz. Auch schiefe Parallelepipeda, wenn sie sonst die Bedingungen des obigen Satzes haben, sind gleich; denn man kann auf die Grundflächen gerade setzen, die bei der nämlichen Höhe den schiefen gleich sind (380). Von den geraden gilt der obige Beweis ihrer Gleichheit, und folglich sind die schiefen auch unter sich gleich.

§. 386. Lehrsatz. I. Parallelepipeda von gleichen aber unähnlichen Grundflächen und ungleichen Höhen verhalten sich, wie diese Höhen. Oder es sey das eine Parallelepipedum = P; seine Grundfläche = G; seine Höhe = H; das andere sey = p; g und h seine Grundfläche und Höhe, und G = g; so ist P:p = H:h.

II. Sind die Höhen gleich, die Grundflächen aber ungleich; so verhalten sie sich wie die Grundflächen.

Beweis. I. Es lassen sich beide Höhen mit einerlei Maaß = a ausmessen; und H = m . a; h = n . a (195); daher H : h = m . a : n . a. Man schneide beide Parallelepipeda mit Ebenen parallel mit der Grundfläche, aber jedesmal in der Höhe eines Maaßtheiles a; so giebt es (n — 1) solcher Schnitte in P; und (m — 1) in p., aber auch in P; m Pppda, jedes = π, und in p solcher n die einzeln gleich sind (384); daher ist P : p = m . π : n . π = m : n = H : h.

II. Die Grundfläche ABCD des Parallppd. AG fig. 152. heiße G; die des Pppd. ag fig. 153 heiße g, die Höhe in beiden einerlei. Man verlänge die Seiten AB und DC der ersten Grundfläche, wie es erfoderlich ist, daß BCKI ein Parallelogramm = g oder = abcd werde (170), und lege durch IK eine Ebene parallel mit BG, welche die auch verlängten EH, FG, in L und M schneidet; so ist BL ein Pppd. (347), und BL = ag (385). Aber im Pppd. AL ist die Fläche BG parallel mit AF; daher ist Pppd. AG : Pppd. BL = G : BK; aber Pppd. BL = ag; und Grundfläche BK = g; folglich hat man Pppd. AG : ag = G : g.

§. 387. Lehrsatz. Ein dreieckigtes Prisma ABCEFD fig. 151 ist die Hälfte eines Parallelepipedum, welches mit ihm einerlei Höhe, aber eine doppelte Grundfläche hat.

Beweis. Die dreieckigte Grundfläche ABC werde durch Zusetzung eines gleich- und ähnlichen

Dreieckes CHB zum Parallelogramm (120); im Punkte H sey HG parallel mit BF und folglich mit CE; und die obere Grundfläche DEF werde erweitert, bis sie in G treffe; und so die Linien EG; FG gezogen, geben ein △ EFG, das dem untern gleich und ähnlich ist (66): denn FG parall. BH; und EG parallel CH (312), folglich auch FG = BH und EH = CH (115, I); so wird BCHGFE ein anderes dreieckigtes Prisma, und AG ein Parallelepipedum (347). Vermöge der Gestalt des Körpers ist nun das Seitenparallelogramm EH parallel mit DB; eben so EA parall. GB; folglich ist der Ebene Winkel, den die Ebene CF (Diagonalparallelogramm oder Diagonalebene) und EH machen, gleich dem, den CF mit DB macht (328). Eben so ist der Winkel von CF mit EA gebildet, dem, von CF mit GB gebildet, gleich. Aus eben dem Grunde sind die Ebenenwinkel, die DB und EH mit der Grundfläche, nach einer Seite (äußerer und innerer) machen, gleich.

Man lege das Prisma BCHGFE so auf das andere dreieckigte, daß ihre Grundflächen sich decken; also CB auf CB, nur so, daß der Punkt B, der zum einen Prisma gehört, auf C des andern komme; und CH auf AB, nur H in A; BH auf AC, und wieder H in A, und so die Seitenparallelogramme, die auf den gedachten Linien stehen, auf einander. Wegen erwiesener Gleichheit der Ebenen Winkel wird das Parallelogramm EH mit EB verbunden in DB und BE fallen; eben so wird GB verbunden mit EB, auf AE und BE fallen (329). Die obern Grundflächen fallen, wegen gleicher Höhe zusammen, und

de=

decken einander, weil ihre Grenzpunkte zusammen fallen; folglich wird das erste Prisma ABCEFD von dem zweiten BCHGFE ganz gedeckt, und beide sind demnach gleich; folglich jedes die Hälfte des Pppd. AG; und jedes hat zur Grundfläche ein Dreieck, welches die Hälfte des Parallelogramms AH oder die Hälfte der Grundfläche des Pppd. AG ist.

§. 388. Zusatz. Wenn AG ein gegebenes Parallelepipedum ist, so läßt sich durch zwo gegen überstehende Seitenlinien, wie BF; CE eine Ebene legen; weil diese Linien parallel sind (343); sie schneidet die untere und obere Grundfläche in CB und EF, diese sind parallel (324), und wegen (115, I) gleich. Da über dies die Seiten an der obern und untern Grundfläche gleich sind, oder AB = DF; AC = DE, so ist △ ACB ≅ △ DEF; dieses ist auch so bei △ △ BCH; FGE; und so entstehen nothwendig die oben genannten zwei dreieckigten Prismata; deren Gleichheit, wie oben, erwiesen wird; daher theilt die Diagonalfläche ein jedes Parallelepipedum in zwei übereinstimmende dreieckigte Prismen.

§. 389. Zusatz. I. Dreieckigte Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen, sind von gleichem Inhalte; denn man kann aus ihnen die Parallelepipeda ergänzen (387), die von ihnen dann das doppelte sind, deren Gleichheit aber erwiesen ist (380, 384), folglich müßen es ihre Hälften unter diesen Umständen seyn.

§. 390. Zusatz. Ein dreieckigtes Prisma A ist einem Pppdum p gleich, wenn sie beide gleiche Grundfläche und Höhe haben; denn, wenn das

dreieckigte Prisma zum Parallelepipedum P ergänzt wird, dessen Grundfläche daher das Doppelte des Prisma wird, so ist P : p = Grundseite des P : Grundseite des p, d. i., = 2 : 1 (383). Da also p = $\frac{1}{2}$ P; so ist p = A, weil A = $\frac{1}{2}$ P.

§. 391. Lehrsatz. Die Sätze in (386) gelten auch von dreieckigten Prismen.

Beweis. Ergänzt man die Prismen, daß aus ihnen Parallelepipeda werden; so ist der Satz vom letztern in (386) erwiesen. Heißen die zwei dreieckigten Prismata Π; π, und die Parallelepipeda, die aus ihnen werden P, p, so ist $\Pi = \frac{1}{2}$ P, $\pi = \frac{1}{2}$ p. Die Höhen der Prismen seyen A; α, ihre Grundflächen Γ; γ, die Höhen der Pppd. H; h; ihre Grundflächen G, g.

In (386, I) sey hier $\frac{1}{2}$ G = Γ und $\frac{1}{2}$ g = γ; aber H = A; h = α; so wird aus P : p = H : h; auch $\frac{1}{2}$ P : $\frac{1}{2}$ p = H : h, d. i., $\Pi : \pi = A : \alpha$ (387)

In (386, II) ist H = h = A = α, und aus der dortigen Proportion wird $\frac{1}{2}$ P : $\frac{1}{2}$ p = $\frac{1}{2}$ G : $\frac{1}{2}$ g; und daher, wenn man die gleichen Dinge einsetzt, wird hier $\Pi : \pi = \Gamma : \gamma$.

§. 392. Lehrsatz. Jedes vieleckigte Prisma MW fig. 154 verhält sich zum dreieckigten AD fig. 155 von gleicher Höhe, wie die Grundfläche MNOQR des ersten zur Grundfläche ABC des zweiten.

Beweis. Man schneide mit Diagonalebenen das vielseitige in dreieckigte; dieses läßt sich allemal thun, weil jedes Paar Seitenlinien, die an den Endpunkten der, in der Grundfläche gezogenen Diagonallinien, errichtet sind, parallel sind (343); auf

auf diese Weise wird das vielseitige in dreieckigte abgetheilt (388).

Die Dreiecke in der Grundfläche, und die, ihnen zugehörigen Prismen seyen der Kürze halben so benannt $\triangle$ MRN $=$ a; das zugehörige dreieckigte Prisma $=\alpha$; $\triangle$ NRQ $=$ b; sein Prisma $=\beta$; $\triangle$ NOQ $=$ c; sein Prisma $=\gamma$; endlich die Grundfläche ABC des dreiseitigen $=$ d, und das Prisma $=\delta$.

Nun ist wegen (391, II) Pris. α : Pris. δ $=$ a : d; ferner Pris. β : Pris. $\delta = b : d$, und Pris. γ : Pris. $\delta = c : d$. Aus diesen Proportionen wird $\alpha : a = \delta : d$; $\beta : b = \delta : d$; $\gamma : c = \delta : d$; daher $\alpha : a = \beta : b = \gamma : c = \delta : d$ (Rechenk. 355); folglich $\alpha + \beta + \gamma : a + b + c = \gamma : c$ (daselbst 356) $= \delta : d$. Aber $\alpha + \beta + \gamma$ machen das Prisma $=$ P aus; und $a + b + c$ dessen Grundfläche $=$ G; folglich ist P : $\delta =$ G : d.

§. 393. Zusatz. Wäre das Prisma δ noch ein Theil von P; so würde der Satz ohne dies wahr seyn, weil auch oben schon folgt $\alpha + \beta : a + b = \gamma : c$, oder $\alpha + \beta : \gamma = a + b : c$, d.i., die Theile des Prisma durch Diagonalfläche abgeschnitten, verhalten sich, wie ihre Grundflächen. Und wegen $\alpha + \beta + \gamma : a + b + c = \gamma : c$, oder $\alpha + \beta + \gamma : \gamma = a + b + c : c$ hat man: Das ganze Prisma verhält sich zu dem nach obiger Art abgeschnittenen Theile, wie die ganze Grundfläche zu der, die dem Theile zukömmt.

§. 394. Lehrsatz. Vieleckigte Prismen P und p von gleicher Höhe verhalten sich, wie ihre Grundflächen G und g.

Bew.

Beweis. Wenn die Prismen, wie im vorigen Satze, durch Diagonalschnitte in dreieckigte abgetheilt sind, so bestehe P aus $A+B+C+D$ dreieckigten Prismen, deren zugehörige dreieckigte Grundflächen $a+b+c+d=G$ sey. Das Prisma p bestehe aus $R+S+T+V$ dreieckigten, deren Grundflächen nach der Ordnung $r+s+t+v=g$ sind.

Wegen (393) hat man $A+B+C+D:D=P:D=a+b+c+d:d=G:d$ (⊙), und $R+S+T+V:V=p:V=r+s+t+v:v=g:v$ (☽). Aber auch wegen (391, II) ist $V:D=v:d$; folglich wird aus dieser letzten Proportion und aus (⊙) $P:V=G:v$ (Rechenk. 361); und diese mit (☽) verglichen, giebt $P:p=G:g$.

§. 395. Zusatz. Ist nun auch außer den gleichen Höhen noch $G=g$, so ist $P=p$; folglich sind Prismen von gleichen Höhen und Grundflächen gleich.

§. 396. Lehrsatz. Vieleckigte Prismata von gleichen Grundflächen, aber ungleichen Höhen, verhalten sich, wie diese Höhen.

Beweis. Die Höhen sollen sich, wie in (386) mit einem gemeinschaftlichen Mase ausmessen lassen; daher gilt der dortige Beweis hier wegen (395).

§. 397. Lehrsatz. Prismatische Körper sind im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen.

Beweis. Das Prisma P habe zur Grundfläche G; zur Höhe H; ein anderes p habe g und h in eben der Bedeutung. Man setze auf die Grundfläche G ein Prisma π, welches zur Höhe h habe; so

so hat man

$P : \pi = H : h$ (396) und

$\pi : p = G : g$ (394); folglich

$P : p = H \times G : h \times g$ (Rechenk. 115), d. i., sie, die Prismen, verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen.

§. 398. Zusatz. P und p sollen ein Paar Würfel seyn, die ich W und w nennen will; und die Seitenlinie vom W sey L, von w, l, sie ist zugleich die Höhe (374), so ist $G = L^2$ und $g = l^2$ daher $W : w = L^2 . L : l^2 . l$, wofür ich $L^3 : l^3$ schreiben will. Folglich sind die Würfel im verdreifachten Verhältnisse (in ratione triplicata, nicht tripla) ihrer Seitenlinien.

§. 399 Zusatz. Es sey bei den Prismen auch noch die Eigenschaft, daß sich ihre Höhen verkehrt verhalten, wie ihre Grundflächen; oder, daß $H : h = g : G$ sey, so ist $H \times G = h \times g$; folglich $P = p$; und man sagt: prismatische Körper sind gleich, wenn sich ihre Grundflächen verkehrt verhalten, wie die Höhen. Dieses ist ein neues Merkmal von der Gleichheit dieser Körper.

Hiebei auch kömmt dieses zu bemerken vor: Wenn ein Paar Prismen bei ungleichen Höhen und Grundflächen gleich seyn sollen; oder wenn $P = p$ seyn soll, so muß $H \times G = h \times g$ seyn, woraus wird $H : h = g : G$ (Rechenk. 348), d. h.: bei glechen prismat. Körpern, deren Höhen und Grundflächen jedoch ungleich sind, verhalten sich die Höhen umgekehrt, wie die Grundflächen.

§. 400. Zusatz. I. Die Sätze von (392) bis hieher, setzen bei Prismen keine bestimmte Zahl von

Sei-

Seitenflächen zum voraus; sie gelten daher auch, wegen (355) vom Cylinder. Da aber die Cylinder, von denen hier die Rede ist, Zirkelflächen zu ihren Grundflächen haben; so läßt sich der Satz (394) auf sie angewandt, so ausdrucken: Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie die Quadrate der Durch = oder Halbmesser ihrer Grundflächen (265).

II. Wegen (397) verhalten sich auch Cylinder, wie die Produkte von eines jeden Höhe in seine Grundfläche.

§. 401. Lehrsatz. Wenn ein Paar prismatische Körper AC und ac fig. 156 ähnliche Grundflächen AE; ae haben; und die Seitenflächen, wie sie nach der Ordnung auf ähnlichen Seiten dieser Grundflächen stehen, ähnlich sind, und solche Lage in beiden Körpern haben, daß gleiche Winkel in ihnen in einer Körperecke zusammentreffen; so sind I die ähnlichliegenden Körperwinkel in ihnen gleich; II. die Ebenenwinkel, die an ähnlichliegenden Winkelpunkten der Grundflächen errichtet stehen, sind gleich. III. Die ähnlichliegenden Linien in ihnen geben Paarweise gleiche Verhältniße. IV. Die ähnlich liegenden Seitenflächen machen mit der Grundfläche gleiche Ebenenwinkel.

Beweis. I. Wegen der Gestalt und Lage der Grenzflächen werden die Körperwinkel aus gleichvielen und einzeln gleichen Flächenwinkel zusammengesetzt, und sind daher gleich (342).

II. Man ziehe aus ähnlichen Punkten E, e auf die nächstliegenden Seiten HF; IB; hf, ib senkrechte Em, En, eμ, eν; diese stehen auch auf

CE

CE, ce senkrecht (95); und die Ebene Emn ist auf den drei Linien HF, IB, CE senkrecht (296); aus eben dem Grunde ist die Ebene e $\mu\nu$ auf hf, ib, ce senkrecht; folglich mn senkrecht auf AF; und IB; desgleichen $\mu\nu$ auf hf und ib. Nun hat man, weil die Seitenfläche BC ∽ bc ist, CE: ce = En: eν; und wegen der Seitenfläche FC ∽ fc auch CE:ce = Em: eμ; aber auch HF: hf = Em: eμ = mn: $\mu\nu$ (234 Zus.); daher △ Emn ∽ △ e$\mu\nu$ (205, II); daher ∢ mEn = ∢ μeν; aber diese Winkel sind das Maas der Ebenenwinkel, die ihre Scheidel in EC, ec haben (§. 307). So aber kann der Beweis von allen geführt werden.

III. Es seyen IB und ib; ferner FE und fe ähnlichliegende Linien. Nun ist, weil die Seitenfläche BC ∽ bc; folgende Proportion IB : ib = EC : ec, und weil auch die Seitenfläche FC ∽ fc; so ist EC : ec = FE : fe; folglich IB : ib = FE: fe; und so von allen Seitenlinien der beiden Körper.

Man lasse aus ähnlichen Punkten C, c die senkrechten Höhen der Körper CD, cd fallen; die, wie es die Zeichnung darstellt, außerhalb der untern Grundflächen nur auf deren Verlängungen fallen sollen. Diese Höhen fallen nun entweder in die Ebene eines Seitenparallelogrammes, oder nicht; so ist so viel wahr, daß in dem △ ECD und ecd, welches von der Ebene durch CD, CE und die durch cd, ce bestimmt wird, der Winkel CED und ced, die Neigung der CE und ce gegen die untern Grundflächen, angiebt (318). Aber wegen (I) würden die ähnlichliegenden Körperwinkel einander decken, wenn sie gehörig, d. i., so auf einander

ander gelegt werden, daß gleiche Seitenecken zusammen fallen; daher fallen die Scheidel der Ebenenwinkel in einander; d.i., diese Scheidel (die Seitenlinien des Körpers) haben alle gegen die Grundflächen wechselweise die nämliche Neigung, folglich haben CE und ce die nämliche Neigung, oder es ist ∢ CED = ∢ ced; und so sind die △△ CDE; cde ähnlich (205, I); und folglich ist CE : ce = CD : cd, d.h., die Höhen dieser Körper verhalten sich, wie jedes Paar ähnlichliegender Seitenlinien in ihnen; weil nämlich CE : ce als ein allgemeines Verhältniß von jedem Paare ähnlichliegender Seiten angesehen werden kann.

Der Beweis für IV kann aus I genommen werden; die Seitenflächen müßen in einander fallen; weil sich offenbar die Körperecken einander decken. Auch kann der Beweis genau so, wie II geführt werden, wenn man nämlich senkrechte Ebenen auf den Scheidel eines solchen Winkels durch ähnlichliegende Punkte zweier ähnlichen Seitenparallelogramme legt, die dann in die Grundflächen einschneiden, und deren Schnittlinien in Grundflächen und dem gedachten Seitenparallelogramm, die Schenkel desjenigen Winkels sind, welcher den Ebenenwinkel mißt.

§. 402. Zusatz. I. Prismen von der obigen Beschaffenheit heißen ähnlich. Man sieht leicht, daß, wenn ähnlichliegende Seitenlinien paarweise gleiche Verhältnisse in Prismen haben; sonst aber auch gleichviele Ecken in ihnen sind, man den Beweis von vorhandenen gleichen Körperwinkeln führen könne; weil es bei dieser Eigenschaft gleiche Sei-

Seitenecken giebt. Aber aus vorhandenen gleichen Körperecken folgen die andern oben genannten Eigenschaften.

II. Die Eigenschaft, daß ein Paar Körper einzeln gleiche Körperwinkel haben, wie sie nämlich in einerlei Ordnung auf einander folgen, und daß auch die Grenzflächen eben so in einerlei Ordnung ähnlich sind, heißt: die Aehnlichkeit der Körper. Machen aber die ähnlichliegenden Seitenlinien der Körper eine mehrfachstetige Proportion, so sind die Grenzflächen ähnlich, denn ohnehin wird, wegen der Voraussetzung der gleichen Körperecken, die Gleichheit dieser Grenzflächenwinkel mit angenommen (218).

§. 403. Lehrsatz. Aehnliche Prismen verhalten sich, wie verdreifachte ähnliche Linien in ihnen (sunt in ratione triplicata linearum homologarum) d. i., wie die Würfel, aus solchen Linien.

Beweis. P und p sollen die Inhalte von ein Paar solcher ähnlichen Prismen seyn; so hat man, wie in (373) erwiesen ist, $P : p = G \times H : g \times h$, aber $G \backsim g$, und ein Paar ähnlichliegende Linien in ihnen sollen L, l heißen; so ist $G : g = L^2 : l^2$ (235); auch ist wegen der Aehnlichkeit der Prismen $L : l = H : h$ (401, III); folglich $P : p = L^2 \times H : l^2 \times h = (L^2 : l^2) + (H : h) = (L^2 : l^2) + (L : l)$ (Rechenk. 370) $= L^3 : l^3 = H^3 : h^3$; also wie die Würfel, aus solchen Linien (398).

§. 405. Lehrsatz. Eines dreieckigten Prisma ABCDEH fig. 157 Seitenparallelogramm ABCD; werde wie eine Grundfläche angenommen, und der Abstand der Linie EH von diesem Parallelogramm

sey gleich der Höhe eines andern dreieckigten Prisma IKLNOP fig. 158, dessen eine Grundfläche das △ IKL die andere das △ PON ist.

Wenn nun das Seitenparallelogramm ABCD des erstern doppelt so groß als △ IKL ist, so sind beide Prismen gleich.

Beweis. Man ergänze das Prisma in der 157ten Figur, indem man an das Seitendreieck ADE ein gleich- und ähnliches setzt nach (387), daß das Parallelepipedum AHGFD aus ihm werde. Auch so werde das dreieckigte Prisma in der 158ten Figur ergänzt; und daraus wird das Parallelepipedum KQ. Aber weil △ IKL $= \frac{1}{2}$ ADCB; so ist nun KIML = ADCB (120). Daher sind nun beide Parallelepipeda gleich (384).

Aber die hinzugekommenen Ergänzungen sind die Hälften der nun gleichen Parallelepipeden (388); folglich sind die unergänzten Prismen, unter den angegebenen Umständen, gleich.

Von der Gleichheit der Pyramiden und Kegel.

§. 406. Lehrsatz. Pyramiden, die gleiche und ähnliche Grundflächen, imgleichen gleich- und ähnliche Seitendreiecke haben, sind übereinstimmend.

Beweis. Bei der angenommenen Gestalt der Grundflächen, ergiebt sich, daß beide Pyramiden von gleicher Zahl Dreiecke umschlossen werden (356). Die Körperecken an der Grundfläche sind wegen den gleichen, und gleichvielen Winkeln an

den

den übereinstimmenden Seitenecken, aus denen sie zusammengesetzt werden, alle gleich (342); daher fallen nicht nur die Seitendreiecke beider Pyramiden an jeder Körperecke auf einander, wenn man beide Körper gehörig auf einander gelegt hat, sondern diese Seitendreiecke decken auch einander wechselweise; folglich fallen die beiden Pyramiden in allen ihren Grenzen zusammen; und sind demnach gleich und ähnlich (21).

§. 407. Lehrsatz. Eine jede dreiseitige Pyramide ABCD fig. 159 kann in zwo dreiseitige Pyramiden und zwei Prismen getheilt werden, wovon I die zwo Pyramiden gleich und ähnlich sind. II. Auch jede dieser zwo der ganzen Pyramide ähnlich ist. III. Die zwei entstandenen Prismen sind unter sich gleich. IV. Die zwei Prismen betragen mehr, als die Hälfte der ganzen Pyramide, oder mehr, als die zwo Pyramiden zusammen.

Beweis. Man theile die Seitenlinien DA, DB, DC, in F, G, E in zwei gleiche Theile, und ziehe die Linien FG, FE, EG; ingleichen theile man in gleiche Theile die Linien AB, AC, BC, in H, I, K, und ziehe IK, IE, KE. Nun ist

I. FGED eine Pyramide, deren Grundfläche das △ FGE sey; imgleichen ist IKCE ein Pyramide, wazu das △ IKC die Grundfläche ist (356).

Weil aber DA : DF = DC : DE = 2 : 1, so ist FE parallel mit AC (202, II) eben so wird erwiesen, daß EG parallel CB; und FG par. AB.

Und wegen AC : CI = CD : CE = 2 : 1 folgt aus den nämlichen Gründen, EI parallel DA; und eben so wird der Beweis für IK parall. AB gegeben,

ben, und für EK parallel DB. Aus diesem folgt nun:

1) Daß AFEI, ferner AFGH und EGBK Parallelogramme sind (114), daher ist

2) FE = AI = CI; und EG = KB = KC; und ∢ FEG = ∢ ICK (313), folglich △ FEG ≅ △ CIK (58).

3) EK = GB = GD; und DE = CE; auch ∢ GDE = ∢ KEC (102, II); folglich auch △ ECK ≅ △ EDG.

4) So ist, wie in (2) △ ICE ≅ △ FED; auch △ EIK ≅ △ DFG.

5) Die Ebene des △ FEG liegt mit ABC parallel (332); wegen diesem Grunde liegt auch IEK par. DBA; und in letzterer liegt auch HGB.

6) Aus (2, 3, 4) folgt, daß die Körperecken der beiden Pyramiden gleich sind, denn es ist K = G; C = E; und die Ecke in D ist der in E als Spitze zur untern Pyramide ICKE gleich; folglich ist die Pyramide FEDG ≅ Pyramide IKCE (406).

II. Weil die Seiten und Grundflächen der Pyramiden ABCD und FGED ähnlich sind, wie das aus (I) erhellet; auch die Seitenecken, welche die Körperecke B ausmachen, denen, welche G ausmachen, einzeln gleich sind, so ist die Ecke G = der Ecke B (352); aus eben den Gründen ist auch die Körperecke A = F, und die E = C; folglich ist nun erwiesen, daß die Pyramide ABCD ∽ Pyr. FGED ∽ Pyr. GKCE (402, II).

III. Zur Erläuterung der zwei entstandenen Prismen, merke man folgendes: Das eine ist

A-

AIHGEFA und das andere ist HGBKEIH. Ihre prismatische Gestalt erhellet so: Am ersten sind wegen (I) AFGH; AFEI, IEGH die Seitenparallelogramme; und die $\triangle\triangle$ AIH; FGE sind seine Grundflächen, weil nach (2, 3) zu schließen $\triangle AIH \cong \triangle FGE$. Das zweite Prisma hat folgende Parallelogramme: HIEG; HIKB; und KEGB zu Seiten, die $\triangle\triangle$ HGB: IEK, welche gleich und ähnlich sind, zu Grundflächen. Deutlicher kann man die Dinge in der 160 fig. sehen, wo die nämlichen Punkte mit kleinen Buchstaben bezeichnet sind. Man nehme, nach (405) das Parallelogramm AFGH zur Grundfläche des ersten; und das $\triangle$ HGB zur Grundfläche des zweiten, so haben beide wegen (5) gleiche Höhe, oder der parallele Abstand der Seite IE von AFGH ist eben so groß, als beide Grundflächen des zweitern Prisma von einander abstehen. Aber offenbar ist das Parallelogramm $AFGH = 2. \triangle HGB$ (167); daher sind nun beide Prismen gleich (§. 405).

IV. Man ziehe FI und FH; so entsteht, nach eben der Art, wie in (I), eine Pyramide FIHA, daß diese der Pyramide $DFGE \cong$ sey; folgt so: Aus (2, 3) ist klar, daß $\triangle AIH \cong \triangle FEG$; eben so ist $\triangle AFH \cong \triangle FDG$; und $\triangle AFI \cong \triangle FED$; und $\triangle HIF \cong \triangle GED$; folglich ist hier die Gleich- und Aehnlichkeit wie in (II) erwiesen; und so ist nun Pyr. $FIHA \cong$ Pyr. $DFGE \cong$ Pyr. IKCE.

Da nun offenbar das erste Prisma AE die Pyramide FIHA in sich enthält, und sich noch über dieselbe ausdehnt; so ist gewiß das Prisma AE >

Pyr. FIHA = Pyr. FGED. Aber so muß nun auch das zweite Prisma HBGEIK > Pyr. IKCE seyn; folglich ist um so mehr Prisma AE + Pris. HBGEIK > Pyr. FGED + Pyr. IKCE.

Nun ist aber aus dem bisherigen erwiesen, daß die ganze Pyramide aus den gedachten zwei Prismen, und den eben genannten zwo Pyramiden bestehe; folglich macht die Summe der zwei Prismen mehr, als die Hälfte der ganzen Pyramide aus.

§. 408. Zusatz. Es ist klar, daß man jede der zwo Pyramiden FGED und IKCE wieder wie die ganze Pyramide in zwei gleiche Prismen, und zwei übereinstimmende Pyramiden zertheilen, und so die Arbeit immer fortsetzen könne. Aber bei dieser fortgesetzten Eintheilung wird man gewiß eine Anzahl Prismen erhalten, deren Körperinhalt größer ist, als eine jede angebliche Größe Z, welche jedoch kleiner, als die ganze Pyramide ABCD seyn soll. Denn gesetzt Z sey um eine Differenz = D kleiner als ABCD, (auch werde dieses D sehr klein angenommen); so ist nun Z + D = ABCD. Die Summe der erhaltenen Prismen sey = S und sie soll bei einer gewissen vielmaligen Eintheilung nach (407) um eine Differenz = d kleiner, als ABCD seyn; so daß S + d = ABCD ist; auch d kann sehr klein, jedoch itzt noch größer, als D seyn; folglich auch nun S + d = Z + D; bei den folgenden Eintheilungen geht von d immer mehr als seine Hälfte ab (407). Daher wird das immer so verminderte d gewiß einmal kleiner, als D; folglich wird gewiß S einmal größer, als Z.

§. 409. Erklärung. Die Höhe einer Pyramide ist die senkrechte Linie, aus deren Spitze auf

die

die Grundfläche, oder, wenns nöthig ist, auf die erweiterte Grundfläche.

§. 410. Lehrsatz. Wenn zwo dreieckigten Pyramiden von gleicher Höhe sind, und man theilt sie nach (407 408) in ihre zwei gleiche Prismen und zwei gleiche Pyramiden, nur, daß man in beiden ganzen Pyramiden die Theilung gleichvielmal verrichtet; so verhält sich die Summe der Prismen in der einen Pyramide zu solcher Summe in der andern, wie die Grundfläche der einen Pyramide zur Grundfläche der andern.

Beweis. In der Pyramide ABCD fig. 159 sey ADB die Grundfläche; und in der 160ten Figur sey es adb; und es seyen die senkrechten Linien aus C, und c, als beider Höhen auf die gedachten Grundflächen gleich. Wegen (407) ist die Ebene IEK parallel ADB; und so ist auch iek parallel adb. Daher werden die senkrechten Linien aus C, und c von IEK und iek in dem nämlichen Verhältnisse, wie AC, und ac geschnitten (330), d.i. diese senkrechten Linien werden von den gedachten Ebenen halbirt; folglich haben die Prismen HGBKEI und hgbkei gleiche Höhen, und verhalten sich daher wie ihre Grundflächen HGB; hgb (391)(⊙).

Wegen HG parallel AD, ist $\triangle HGB \backsim \triangle ADB$ (205) auch eben so $\triangle hgb \backsim \triangle adb$.

Wegen der Halbirung von AB und ab hat man $AB:ab = HB:hb$ auch $AB^2 : ab^2 = HB^2 : hb^2$. Aber $\triangle ADB : \triangle HGB = AB^2 : HB^2$ und eben so ist $\triangle adb : \triangle hgb = ab^2 : hb^2$ (234); daher $\triangle ADB : \triangle adb = \triangle HGB : \triangle hgb$, und wegen (⊙) = Prism. HGBKEI : Prisma

hgbkei = Prism. AHIEFG : Prism. ahiefg = 2. Prism. HGBKEI : 2. Prism. hgbkei = Prism. HGBKEI + Prism AHIEFG : Prism. hgbkei + Prism. ahiefg.

Es heiße HGBKEI + AHIEFG = P, und hgbkei + ahiefg = p.

Und wenn man nach (408) die in jeder ganzen Pyramide durch Theilung entstandene zwo kleine Pyramiden, dergleichen FGED und IKCE in ABCD; ferner fged und ikce in abcd sind, wieder in ihre Prismen und Pyramide theilt, so wird auf die nämliche Weise, wie oben, wieder erwiesen, daß auch die Prismen in diesen kleinen Pyramiden sich verhalten, wie △ FEG : △ feg oder wie △ IKC : △ ikc; aber jedes Paar dieser Dreiecke ist wie △ ABC : abc (205).

Nun sind aber bei jeder gleichvielsten Theilung die zwo entstandenen kleinen Pyramiden gleich und ähnlich; daher ist auch das Paar Prismen in einer solchen kleinen Pyramide dem Paare in der andern gleich; und so läßt sich nun, wenn man die zwei Paare Prismen, die in den kleinen, in ABCD enthaltenen Pyramiden, entstanden sind, Π nennt, und die auf eben die Art in abcd enthaltene π nennt, die Proportion so geben; △ ICK : △ ick = △ ABC : △ abc = Π : π; denn das Verhältniß Π : π, ist wie oben, nur ein doppeltes in Rücksicht des △ ABC : △ abc.

Nun ist aber △ ABC : △ abc = P : p = Π : π; oder P + Π : Π = p + π : π, d. i. Π : π = P + Π : p + π : = △ ABC : △ abc.

Daß aber bei jeder folgenden gleichvielsten Theilung immer diese Proportion herauskomme, er=

erhellt daraus, weil sich von jeder folgenden und vorhergegangenen Theilung eben die Schlüsse machen lassen, wie von den beiden, die eben im Beweise betrachtet wurden; und die das P; Π; p; π; gaben.

§. 411. Lehrsatz. Dreiseitigen Pyramiden, wie die in der 159ten und 160ten Figur von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

Beweis. Die Grundflächen seyen wie oben ADB, adb. Nun soll erwiesen werden, daß △ ADB : △ adb = Pyr. ABCD : Pyr. abcd. Man setze △ ADB : △ adb = Pyr. ABCD : Z; wo man noch nicht weiß, ob Z = Pyramide abcd sey. Es ist aber entweder Z < abcd, oder Z > abcd.

Erster Fall. Es soll bewiesen werden, daß Z nicht kleiner, als abcd seyn könne.

Wenn Z < abcd ist, so theile man abcd in seine Pyramiden und Prismen, und man erhält eine Summe Prismen = p in abcd, welche größer, als Z ist (408). Theilt man nun auch so, durch gleichvielmalige Abtheilungen die Pyramide ABCD in ihre Pyramiden und Prismen, und setzt die Summe der erhaltenen Prismen = P, so hat man wegen (410) △ ABD : △ abd = P : p; aber wegen △ ABD : △ abd = Pyr. ABCD : Z hat man P : p = Pyr. ABCD : Z; oder P : Pyr. ABCD = p : Z. Nun ist aber eben gezeigt worden, daß, wenn Z < Pyr. abcd ist; dann p > Z werde; folglich müßte in der letztern Proportion auch P > Pyramide ABCD seyn, welches aber offenbar falsch ist; folglich ist Z nicht kleiner, als Pyr. abcd.

Es ist klar, daß wenn man setzt △ abd : △ ABD = Pyr. abcd : Y, und $Y <$ Pyr. ABCD sey, diese Proportion falsch sey, weil hier der Beweis eben so, wie für Z und abcd kann geführt werden.

Zweiter Fall. Es soll bewiesen werden, daß Z nicht größer, als abcd seyn könne.

Es sey wieder △ ABD : △ abd = Pyramide ABCD : Z; und $Z >$ Pyr. abcd. Diese Proportion giebt (☽) △ abd : △ ABD = Z : Pyr. ABCD (Rechenk. 349). Man kann annehmen (♀); Z : Pyr. ABCD = Pyr. abcd : Y d. i. auch Z : abcd = ABCD : Y, woraus erhellet, daß $Y < ABCD$ sey, weil $Z > abcd$ seyn soll (Rechenk. 107, II). Aus (☽) und (♀) wird aber △ abd : △ ABD = Pyr. abcd : Y. Diese Proportion nun setzt voraus $Y <$ Pyr. ABCD, welches nach dem Beweise im ersten Falle nicht seyn kann; daher kann diese Proportion nicht bestehen. Der Grund der Unrichtigkeit liegt aber offenbar darinn, daß $Z >$ Pyr. abcd angenommen ward, welches also falsch seyn muß, weil diese Voraussetzung auf eine falsche Proportion führt; daher ist auch Z nicht größer, als die Pyr. abcd; und wegen dem Beweise für den ersten Fall, ist auch Z nicht kleiner, als Pyramide abcd; daher ist Z = Pyramide abcd; folglich ist nnn △ ABD : △ abd = Pyr. ABCD : Pyr. abcd.

§. 412. Zusatz. Wenn nun auch ist △ ABD = △ abd; so ist Pyr. ABCD = Pyr. abcd; daher sind dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe, und gleichen Grundflächen gleich.

§. 413. Lehrsatz. Die vielseitige Pyramide verhält sich zur dreiseitigen von der nämlichen Höhe, wie die Grundfläche der ersten zur Grundfläche der zweiten.

Beweis. Die dreiseitige Pyramide der 162ten Figur habe mit der vielseitigen der 161sten Figur gleiche Höhe. Man theile der letztern Grundfläche durch Diagonallinien EB, EC in Dreiecke, so werden aus dieser letzten so viele dreiseitige Pyramiden, als es Dreiecke in ihrer Grundfläche giebt; denn in den Winkelpunkten, wo die Diagonallinien eintreffen, sind Seitenlinien, die zur ganzen Pyramide gehören, errichtet; durch zwo solcher Seitenlinien, und die zugehörige Diagonale giebt es ein ebenes Dreieck; wie FBE, FCE sind, welche die abgeschnittene Pyramide auf dieser Seite begrenzen (295).

Die dreiseitigen Pyramiden, die in der 161ten Figur nach oben entstehen, heißen nach der Ordnung P; Q; R; u. s. w. ihre Grundflächen p, q, r u. s. w.; sie haben gewiß einerlei Höhe, weil ihre Grundflächen in einer Ebene liegen, und ihre Spitzen in einem Punkte F zusammentreffen. Die dreiseitige Pyramide der 162ten Figur heiße Π ihre Grundfläche π; so ist nun wegen (411) $P : \Pi = p : \pi$, oder $P : p = \Pi : \pi$; und $Q : q = \Pi : \pi$, und $R : r = \Pi : \pi$; daher $P : p = Q : q = R : r$ u. s. w., und $P + Q + R : p + q + r = R : r = \Pi : \pi$ (Rechenk. 356).

§. 414 Zus. I. Weil $P + Q + R : \Pi = p + q + r : \pi$; so ist eine vielseitige Pyr. einer dreiseitigen gleich, wenn sie nebst gleichen Höhen, auch gleiche Grundflächen haben.

II. Weil auch $P+Q+R:R=p+q+r:r$, so verhält sich die, von der ganzen Pyramide abgeschnittene dreiseitige zu dieser ganzen, wie die ganze Grundfläche zu der, die der Dreiseitigen zugehört.

§. 415. Lehrsatz. Jedes dreiseitige Prisma ABCDEF fig. 163 läßt sich in drei gleichgroße dreiseitige Pyramiden zertheilen, wovon jede mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Die Grundflächen des gedachten Prisma seyen ABC; DEF. Man ziehe in der Seitenfläche ABDE die Diagonale AD; desgleichen in der Seitenfläche CFDB die Diagonale CD; so läßt sich mit einer Ebene durch ACD schneiden (295); und man erhält eine dreiseitige Pyramide ABCD; die mit dem Prisma die nämliche Grundfläche ABC hat, und ihre Spitze D liegt in der andern Grundfläche des Prisma, daher hat auch diese Pyramide mit dem Prisma einerlei Höhe; sie heiße die erste Pyramide.

Man ziehe die Diagonallinie CE in dem dritten Seitenparallelogramm AEFC; so läßt sich, wie oben, wieder mit einer Ebene ECD schneiden, und man erhält die zweite Pyramide FEDC, welche mit dem Prisma die nämliche Grundfläche FED, und auch, weil ihre Spitze C in der andern Grundfläche des Prisma liegt, die nämliche Höhe hat.

Die erste und zweite Pyramide sind nothwendig gleich (412).

Aber nun bleibt noch, nachdem die zweite Pyramide abgeschnitten ist, eine dritte Pyramide übrig, sie hat zur Grundfläche das △ ACE, und ihre Spitze in D; ihre Seitenflächen sind ACD, AED.

und

und ECD. Aber wenn man für die zweite Pyramide das △ ECF zur Grundfläche nimmt, so ist auch dessen Spitze in D; und weil △ BCE ≅ △ ECF (119); so sind die zweite und dritte Pyramide gleich; folglich sind alle drei gleich; aber von den beiden ersten ist klar, daß sie mit dem Prisma die nämliche Grundfläche und Höhe haben; wenn man schon von der dritten diese Gleichheit der Höhe und Grundfläche nicht darstellen kann; so ist doch diese dritte Pyramide einer jeden der beiden andern gleich; welches eigentlich der Zweck des Beweises ist.

§. 416. Zusatz. Daher ist eine jede dreiseitige Pyramide der dritte Theil von einem dreiseitigen Prisma; wenn sonst beide Körper gleiche Höhe und Grundfläche haben.

§. 417. Zusatz. Weil nach (392) jedes vielseitige Prisma in dreieckigte sich zertheilen läßt; so sollen die, aus einem vielseitigen Prisma = P entstandenen dreiseitigen nach der Ordnung A, B, C, D, u. s. w. heißen. Von jedem nehme man eine Pyramide, die mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat; und die Pyramiden heißen a, b, c, d, so ist $a = \frac{1}{3}A$; $b = \frac{1}{3}B$; $c = \frac{1}{3}C$; $d = \frac{1}{3}D$ u. s. w. und $a + b + c + d = \frac{1}{3}(A + B + C + D) = \frac{1}{3}P$. Diese Pyramiden zusammen haben mit dem Prisma gleiche Grundfläche (415), und ihre Summe sey $= \Pi$, so ist $\Pi = \frac{1}{3}P$.

§. 418. Lehrsatz. Die Sätze (394 bis 397) und (399) gelten auch von Pyramiden.

Beweis. In (394) und den folgenden kömmt es nur auf Verhältnisse der Prismen an; aber die ganzen Prismen verhalten sich gewiß, wie ihre Drittheile

theile, d. i., wie die Pyramiden, deren Höhen und Grundflächen die dort genannte Eigenschaft haben. In (399) wird eben so von Verhältnissen, nur von Gleichheitsverhältnissen, die Sache verstanden.

§. 419. Zus. I. Da man das ganze Verfahren von (401) bei Pyramiden anbringen kann, worauf sich die dortigen Schlüsse gründen, so kann man sagen: Pyramiden von gleichvielen, und ähnlichen, in einerlei Ordnung auf einanderfolgenden Grenzflächen, sind ähnlich.

II. Folglich verhalten sich ähnliche Pyramiden, wie verdreifachte Linien in ihnen; d. i., wie die Würfel aus solchen Linien (403).

§. 420. Zusatz. Weil die Kegel Pyramiden von unzählig vielen Seiten sind (357); so gelten auch die Sätze von Pyramiden, für die Kegel.

Daß aber nicht alle Kegel ähnlich sind, erhellet auch schon aus (419, II). Wenn daher von der Aehnlichkeit schiefer Kegel die Frage seyn soll, so müßen ihre Achsen gegen die Grundflächen einerlei Neigung haben; dann auch müßen sich diese Achsen zu einander verhalten, wie die Durchmesser der Grundflächen.

§. 421. Zusatz. Kegel mit Cylindern, beide von einerlei Grundfläche und Höhe verglichen, geben das nämliche Verhältniß, wie Pyramiden mit Prismen verglichen, weil die ersten Körper mit letztern von einerlei Gattung sind; daher ist auch ein Kegel der dritte Theil von einem Cylinder, mit dem er die nämliche Grundfläche und Höhe hat (417).

§. 422. Erklär. Wenn man in eines Cylinders AB ba fig. 164 Grundfl. einen concentrischen

Kreis

Kreis EFH annimmt, so ist offenbar, daß EHF fhe ein Cylinder sey, der im großen enthalten ist. Nimmt man ihn heraus, so bleibt eine Röhre übrig, die man sich in der Zeichnung leicht vorstellen kann.

Der cylindrische Ring, ADBGEFH ahfbga heißt die Wand der Röhre.

§. 423. Lehrsatz. Die Wand der cylindrischen Röhre verhält sich zum kleinen Cylinder, der die Holung der Röhre ausfüllt, wie der concentrische Ring ADBGEHF; zur Grundfläche EF des kleinen Cylinders.

Beweis. Der ganze Cylinder ABba heiße $=C$; der kleine c, beide haben offenbar einerlei Höhe; daher hat man $C:c=CA^2:CE^2$ (400); also auch $C-c:c=CA^2-CE^2:CE^2$; aber $C-c$ ist die cylindrische Röhre (422), und $CA^2-CE^2:CE^2$ ist das Verhältniß des Ringes zur kleinen Kreisfläche (267, II).

§. 424. Zusatz. Es sey GE eine Tangente des Kreises EF; so ist, weil $CA=CG$, auch $CA^2-CE^2=CG^2-CE^2=EG^2$ (235); aber $EG^2=AE\times EB$ (214); so hat man auch in (423) $C-c:c=AE\times EB:CE^2$; hier ist AE die Dicke der Wand, $EB=AB-AE$ der Unterschied des Durchmessers und der Dicke der Wand. Man kann also den Satz so ausdrucken: Der Inhalt der Röhre verhält sich zum kleinen Cylinder, wie das Rechteck, aus seiner Dicke und dem Unterschied zwischen dieser Dicke und großen Durchmesser, zum Quadrate des Halbmessers dieses kleinen Cylinders.

Daß

Daß die Wand und Cylinder einerlei Höhe haben müßen, setzt schon der Satz C—c:c zum voraus, weil, wenn verschiedene Höhen da wären, C—c nicht die Röhrwand wäre.

II. Auch ist $C-c:C=CA^2-CE^2:CA^2$; oder $C-c:C=AE\times EB:CA^2$; d. h.: Die Röhrwand verhält sich auch zum großen Cylinder, wie das gedachte Rechteck zum Quadrate des Halbmessers dieses großen Cylinders.

III. Folglich verhält sich überhaupt die Röhrwand zu einem gleichhohen Cylinder, wie das Rechteck aus seiner Dicke und dem Unterschiede dieser Dicke, und großen Durchmesser, zum Quadrate des Halbmessers des Cylinders.

§. 425. Lehrsatz. Ein ebener Schnitt ADBEA fig. 165 durch der Kugel Mittelpunkt C theilt die Kugel in 2 übereinstimmende Stücke AEBDAFHB und AEBDAGIB, wovon jedes eine halbe Kugel ist.

Beweis. Man setze das Stück AGB so i[n] das andere AFB, daß die Schnitte noch auf einander kommen, und C in C sey, so wird die Kreisfläche (369), die zum untern Stücke gehört, ge[-]wiß die, zum obern Stücke gehörige, decken, wei[l] es eine und die nämliche Fläche ist. Es seyen CG CF zween senkrechte Halbmesser auf den gedachte[n] Schnitt, so fallen diese auch in einander (302 aber auch G in F. Fielen nun die krummen Oberfl[ä]chen irgend in einer Gegend, etwa in H und wo doch H und I sonst in einer geraden, durch gehenden, Linie liegen, nicht zusammen; so mü[ß]ten gerade Linien CH, CI aus C in diese Gegen[d]

aber

aber an die Oberflächen der Kugelstücke gezogen, ungleich seyn, welches aber nicht seyn kann (366); folglich fallen die Kugelstücke ganz zusammen, und jedes ist eine Halbkugel.

§. 426. Erklärung. ADB in der 166ten Figur sey ein Halbkreis, der sich um seinen senkrechten Halbmesser CD dreht, und so nach (365) die halbe Kugel beschreibt. Es werden mit dem Durchmesser AB parallele Sennen lL; pP; sS; u. s. w., auch die Tangente Tt durch D gezogen; diese Sennen sind alle auf CD senkrecht. An den Punkten B, L; P, S, sind senkrechte; und folglich mit CD parallele Linien gezogen, die, wie es die Zeichnung darstellt, innerhalb des Kreises, die Sennen, die näher am Durchmesser liegen, treffen. Aber die nächste Senne welche weiter vom Durchmesser liegt, trift mit einer senkrechten Linie, außerhalb des Kreises, bei beider Verlängung nämlich, auch in einem rechten Winkelpunkte zusammen; dieses zeigen die Punkte K; O, R. Bei der obigen Umdrehung nun werden diese Sennen allein und auch mit ihren auswärts gehenden Verlängungen Kreisflächen beschreiben; die auf sie gesetzten senkrechten Linien aber, wie KB, LV, LO, PM und PI u. s. w. beschreiben cylindrische Oberflächen. Man heiße die Cylinder, die ganz in der Halbkugel liegen, deren eine Grundfläche nämlich, die vom Durchmesser AB entfernter liegt, und den Kreis berührt, wie VLlv; MPpm u. s. w. sind, inwendige; die Cylinder aber, deren eine Grundfläche, die näher an AB liegt, und den Kreis berührt, und deren Seitenflächen ganz außer der Kugel liegen, sollen auswendige Cylinder heißen.

§. 426. Lehrsatz. Der Unterschied der in einer Halbkugel nach (425) entstandenen inwendigen und auswendigen Cylinder kann kleiner werden, als jeder angegebene Körper.

Beweis. Der senkrechte Halbmesser CD sey in mehrere gleiche Theile CE, EF, FG, GD eingetheilt, und durch die Theilpunkte E, F u.s.w. werden mit AB parallele Sennen gelegt, an deren Berührungspunkten im Kreise die senkrechten LO, PR, ST errichtet werden. Aus (178, III) erhellet, daß die Endpunkte jeder folgenden, von AB entfernter liegenden Senne näher an CD liegen; und folglich die senkrechte Linien aus diesen Endpunkten, die zunächst aber näher an AB liegende Senne, innerhalb des Kreises; aber die nächste, nur weiter von AB liegende, außerhalb des Kreises treffen werde.

Zwischen jedem Paare solcher Sennen entsteht daher bei Umdrehung des Kreises ein inwendiger, und ein auswendiger Cylinder (354). Ihr Unterschied ist eine cylindrische Röhrwand (422). Der letzte Cylinder, der zu äußerst seine Grundfläche von der Tangente durch D erhält, ist ein auswendiger, und kann keinen inwendigen haben, von dem er ein Theil wäre, weil nichts von seiner äußersten Grundfläche innerhalb des Kreises liegt (156, III).

Nun ist klar, daß, weil Hh = Tt und GD = CE (115); auch Cylinder STtsS = Cylinder HNnh (395); eben so

Röhrwand QRqr = Röhrw. HMhm
Röhrwand MOmo = Röhrw. IL il
Röhrwand VKvk = Röhrw. VKvk.

Ab=

Addirt man alles linker Hand, und alles rechter Hand zusammen, so erhält man gleiche Summen (Rechenk. 337). Offenbar enthält die Summe linker Hand den Unterschied zwischen den inwendigen und auswendigen Cylindern; und die rechter Hand macht den Cylinder ABKk aus, welcher der unterste, oder der dem Durchmesser zunächst liegende auswendige ist. Daher ist der Cylinder ABKk so groß, als der Unterschied der auswendigen und inwendigen Cylinder. Nun ist aber klar, daß, wenn man CE, die Höhe dieses Cylinders in e halbirt, und eine Ebene durch e legt, der Cylinder bis an e nur die Hälfte von ABKk sey; und wenn man die Halbirung zwischen C und e immer so fortsetzt, und dieses auch mit den andern Abtheilungen in CD so macht, man die obigen Schlüsse, von der Gleichheit der Unterschiede mit dem untersten auswendigen Cylinder immer anbringen könne; aber bei diesen fortgesetzten Halbirungen erhält man gewiß endlich einen untersten Cylinder, der kleiner, als jeder gegebene Körper seyn wird.

§. 427. Zusatz. I. Der obige Schluß von dem, durch Halbirungen entstandenen kleinern Unterschied, der sich in einem jedesmal kleinern Cylinder ABKk giebt, setzt offenbar eine eben so vielmalige Halbirung der übrigen gleichen Abtheilungen in CD voraus, weil nur dieser Cylinder dem Unterschiede unter der Bedingniß gleich ist, daß CD in gleiche Theile, jeder = CE, oder Ce getheilt sey.

II. Nach dem Verfahren in (426) liegt ein Theil von jeder Röhrwand, welche den Unterschied des inwendigen und auswendigen Cylinders ausmacht, außerhalb der Kugel, der andere innerhalb,

weil die senkrechten Linien, und verlängten Sennen sich außerhalb des Halbkreises treffen, und dort die Grenze des Körperraumes der Wand bei der Umdrehung bilden; aber die innere Begrenzung wird von senkrechten Linien, die ganz innerhalb der Kugel liegen, gebildet. In der Figur sind sie leicht zu erkennen.

Der, nach (I) immer kleiner werdende Cylinder ABKk, ist also für sich jedesmal ~~kleiner~~, als der Unterschied aller inwendigen Cylinder allein genommen, und die Theile der Röhrwände, die innerhalb der Kugel liegen; und daher kann auch um so mehr dieser Unterschied bei der Eintheilung in (I) kleiner werden, als jeder gegebene Körper. Man heiße einen inwendigen Cylinder, mit dem zugehörigen inwendigen Rohrwandstücke: Kugelscheibe; so ist klar, daß alle Kugelscheiben die Halbkugel, und alle inwendige Cylinder zwar kleiner, als die Halbkugel, sind; aber diese Unterschiede selbst kleiner, als jeder angegebene Körper werden können.

III. Die Halbkugel sey $= H$. Die Summe der inwendigen Cylinder $= C$; der Unterschied zwischen der ganzen Halbkugel, oder aller Kugelscheiben, und zwischen allen Cylindern sey $= D$; so, daß $H = C + D$ sey, wo D so klein, als man will, angenommen werde.

Ein Körper $= K$ sey kleiner, als die Halbkugel, um einen Unterschied d, wo d auch so klein seyn kann, als man will, so, daß $K + d = H = C + D$ sey. Nun werden die Halbirungen nach (I) fortgesetzt; so erhält man immer kleinere D; man kömmt aber gewiß auf solche, die kleiner, als d

sind

sind (II). Nun war $K + d = C + D$; aber in den letztern Zuständen war $d > D$; daher ist nun $K < C$ (Rechenk. 337, IV, 2). Das heißt, die Summe der inwendigen Cylinder kann bei immer dünner genommenen Kugelscheiben größer werden, als jeder Körper, der kleiner ist, als die Halbkugel.

IV. Die Betrachtungen in (II) geben auch, daß ABKk für sich ~~kleiner~~ größer sey, als der Unterschied der Kugelscheiben und der Röhrwandstücke, welche außerhalb der Halbkugel liegen; und folglich können auch diese Röhrwandstücke, welche die Unterschiede zwischen allen Kugelscheiben, und allen auswendigen Cylindern sind, kleiner werden, als jeder angebliche Körper.

V. Es sey U der Unterschied in (IV), und W die Summe aller auswendigen Cylinder; so, daß $H + U = W$. Man nehme einen Körper M an, der größer, als die Halbkugel ist, und zwar um u; so, daß u wieder so klein seyn kann, als man itzt will; so ist $H + u = M$. Wenn man aber die Halbirungen fortsetzt, so kömmt man gewiß auf ein U, welches kleiner, als u ist (IV), und in diesem Zustande ist $H + U < H + u = M$; daher kann auch die auswendige Cylindersumme kleiner werden, als jeder Körper, der größer, als die Halbkugel ist, wenn auch sein Unterschied von der Halbkugel noch so wenig beträgt.

VI. Die Schlüße in (III und V) berechtigen anzunehmen, daß, wenn die inwendigen, und so die auswendigen Cylinder unendlich dünne werden, oder, daß, wenn man eine unendliche Menge inwendiger und auswendiger Cylinder macht, die Summe der inwendigen sowohl, als die der aus-

wendigen Cylinder, der Halbkugel gleich seyn müsse, weil der Unterschied weniger beträgt, als jede nur noch angebliche kleine Größe.

§. 428. Lehrsatz. Die Halbkugel ist zweimal größer, als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. I. Es seyen in der 167ten Figur ED; und FG ein Paar senkrechte Durchmesser auf einander; an deren Endpunkten D; F; E; G Tangenten gelegt sind, so ist ABIH ein Quadrat (242). Man ziehe aus dem Mittelpunkte C des Kreises die Linien CB, CA; diese sind gleich (244, V).

Dreht sich nun der Kreis; das Quadrat ABIH; und das gleichschenklichte Dreieck ACB um die feststehende DE; so beschreibt der Kreis die Kugel; das Quadrat einen geraden Cylinder, das Dreieck einen geraden Kegel (354; 358; 364).

II. Nimmt man nur die Halbkugel FDGF; so ist ihre Grundfläche so groß, als die des Kegels, und die des Cylinders ABGF; weil FG = AB; folglich sind die Kreise dieser gleichen Durchmesser gleich. Auch haben die Halbkugel, der halbe Cylinder und der Kegel gleiche Höhen = CD.

III. Nun ist der Cylinder ABGF = 3 Kegel ACB (421). Es bleibt aber ein Körper AFCBG, nachdem der Kegel vom Cylinder hinweggenommen ist, übrig, den ich Becher nennen will; dieser Becher ist demnach = 2 Kegel ACB; ich behaupte, dieser Becher sey so groß, als die Halbkugel.

IV. Gesetzt AFCBG < Halbkugel FDG = FEG. (Um deutlicher zu seyn, nehme ich die

obere

obere Halbkugel FEG, und den Becher in Vergleichung.

V. Es werde nun in der obern Halbkugel die CE in mehrere gleiche Theile in s, t, u, w, u. s. w. getheilt, durch diese Punkte aber Sennen mit FG parallel gelegt, so entstehen wie in (426) inwendige Cylinder. Die Summe dieser Cylinder sey = S, sie kann nach (427, III) größer werden, als der Becher, wenn man nach (IV) annimmt, der Becher sey kleiner, als die Halbkugel.

VI. Es werde CD in eben so viele gleiche Theile getheilt, als CE, um auch hier die inwendige Cylinder in (V) zu haben. Durch die Theilpunkte S, T, V, W u. s. w. werden mit FG parall. Linien QR, OP, MN, u. s. w. gezogen; welche CA in β; δ; ε; λ, die CB in ν, π, φ, ψ schneiden. In den gedachten Punkten der CA werden mit CD parallele Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\eta\varepsilon$ u. s. w. in den Punkten der CB eben so $\mu\nu$; $\varrho\pi$; $\theta\varphi$; $\xi\varphi$ u. s. w. gezogen; diese stehen auf FG; QR; PO u. s. w., senkrecht.

VII. Es ist aber $C\alpha = \alpha\beta = CS = S\beta$. Denn $CD = DA$ (244); und $CD : DA = CS : S\beta$ (204); folglich $CS = S\beta$; und daher $CS\beta\alpha$ ein Quadrat (109).

Auch ist $CS : S\beta = CT : T\delta$; daher $CT = T\delta$; und so wird der Beweis für $CU = U\varepsilon$; $CW = W\lambda$ geführt; und mit den eben so liegenden Linien rechter Hand der CD in, und um CDB hat es wegen den nämlichen Gründen auch die nämliche Bewandniß.

VIII. Bei dem obigen Umdrehen in (I) werden die Parallelogramme $F\alpha\beta Q$; $Q\gamma\delta O$ u. s. w. Röhrwände beschrieben; ich behaupte jede Röhrwand, die eben so weit vom Mittelpunkte C abliegt, als ein inwendiger Cylinder in der obern Halbkugel, ist diesem Cylinder gleich. Denn es ist die Röhrwand $FQ\beta\mu\nu RG = F\alpha \times \alpha G$ (424)*. Aber weil $Cs = C\alpha$ (VII), so ist $F\alpha = Es$; und $\alpha G = sD$; daher $F\alpha \times \alpha G = Es \times sD$; aber $Es \times sD = sr^2$ (212).

Nun ist aber Röhrwand : Cylinder $xr = F\alpha \times \alpha G : sr^2$ (424); daher Röhrw. $FQ\beta\mu\nu RG$ = Cylinder xr.

Eben so ist Röhrwand $OQ\delta\pi PR = Q\gamma \times \gamma R$; aber $Q\gamma = QS - S\gamma = EC - Ct = Et$; und $\gamma R = CG + S\gamma = DC + Ct = tD$; und so ist $Q\gamma \times \gamma R = Et \times tD = tp^2$.

Nun ist wieder Röhrwand $QQ\delta\pi PR$: Cyl. $qp = Q\gamma \times \gamma R : tp^2$; daher auch die Gleichheit dieser Röhrwand, und dem gleichentfernten Cylinder bewiesen ist. Daß der Beweis für die noch folgenden eben so gegeben werden könne, fällt in die Augen. Man hat daher

Cylinder xr = Röhrwand $Q\alpha\nu G$
Cylinder qp = Röhrwand $O\gamma\pi R$
Cylinder on = Röhrwand $M\kappa\varphi P$
Cylinder ml = Röhrwand $K\kappa\psi N$

Hier

---

* Obschon das Gleichheitszeichen hier gebraucht wird; so soll das doch nichts anders heißen, als statt der Röhrwand kann man das Produkt $F\alpha \times \alpha G$ im Verhältniß brauchen, welches eigentlich der (§. 422) beweist.

Hier ist die Summe der Cylinder, oder die Summe linker Hand, so groß, als die Summe der Röhrwände. Aber die Summe der Cylinder ist nach (V) größer, als der Becher; wenn angenommen ward, daß der Becher kleiner, als die Halbkugel sey; folglich müßte auch die Summe der Röhrwände größer, als der Becher seyn; aber dieses ist offenbar falsch; weil, gewiß der Becher die obigen Röhrwände alle in sich enthält, und noch darüber die dreieckigten Wände $\beta\alpha C\nu\mu$; $\delta\gamma\beta\pi\xi\nu$ u. s. w. Wenn nun auch bei jeder wiederholten Halbirung der Theile von CD nach (426) diese dreieckigten Wände kleiner werden, so werden sie doch bei jeder noch angeblichen Zahl Halbirungen noch etwas betragen; und daher den Schluß rechtfertigen, daß die Röhrwände nicht größer, als der Becher seyn können, welches doch aus der angenommenen Voraussetzung durch den gegebenen Beweis folgte; folglich ist die Annahme in (IV), daß der Becher kleiner, als die Halbkugel sey, unrichtig, weil sie auf die obige Ungereimtheit führt.

IX. Man nehme nun an, der Becher sey größer, als die Halbkugel.

X. In der 168ten Figur sey sonst alles, wie in der 167ten. Nur daß in der obern Halbkugel auswendige Cylinder FqrG; xp, zn u. s. w. Durch die Endpunkte der gleichen Theile in CE angelegt sind. Wie in (VI) sind in der untern Halbkugel wieder die Parallellinien QR, OP u. s. w. gezogen; und werden von CA, CB in Punkten β, δ, ε, λ; ν, π, φ, ψ geschnitten. Von diesen Schnitten werden auf die nächste, nur von C weiter liegende Parallele, die senkrechten $\beta\alpha$; $\delta\gamma$; $\varepsilon\eta$; $\lambda\kappa$; $\nu\mu$;

u. s. w. gezogen; diese senkrechten Linien beschreiben bei der Umdrehung die inwendige krumme Fläche der verschiedenen Röhrwände; die auswendige Fläche dieser Wände wird von den Theilen in AF und GB beschrieben.

XI. Bei der Annahme, daß der Becher größer, als die Halbkugel sey, wird die Summe der auswendigen Cylinder in der obern Halbkugel kleiner, als dieser Becher werden können (427, V)

XII. Jeder auswendige Cylinder in der obern Halbkugel ist der Röhrwand gleich, die den Theil in CD zu ihrer Höhe hat, welcher von C eben so weit abliegt, als der Theil in CE, der des Cylinders Höhe ist; denn die Röhre QFGR ist selbst ein Cylinder, und = FqrG. Aber, wie in (VII) erwiesen, ist $CS = S\beta = Cs$; $CT = T\delta = Ct$ u. s. w.

Nun ist Cylinder xp : Röhrwand $Q\alpha\mu R = sy^2 : Q\beta \times \beta R$ (424). Aber $Q\beta = Es$ und $\beta R = sD$; daher $Q\beta \times \beta R = Es \times sD = sy^2$ (212); folglich, weil $sy^2 = Q\beta \times \beta R$, ist der Cylinder xp = Röhrwand $Q\alpha\mu R$.

Der Beweis ist nun eben so für die folgenden von C gleichentfernten Cylinder, und Röhrwände. Daher hat man

Cylinder Fr = Cylinder QG
Cylinder xp = Röhrwand $Q\alpha\mu R$
Cylinder zn = Röhrw. $O\gamma\varrho P$
Cylinder χl = Röhrw. $M\nu\theta N$
Cylinder $\omega\sigma$ = Röhrw. $K\kappa\zeta L$.

Addirt man, was linker und was rechter Hand steht, zusammen, so sind unstreitig die Summen gleich.

gleich. Aber die Summe der Cylinder ist kleiner, als der Becher (XI); folglich wäre auch die Summe der Röhrwände kleiner, als der Becher, welches aber falsch ist, weil hier, indem der Röhrwände innere Grenze bei endlicher Theilung der CD noch über die innere Grenze des Bechers hinausgehen, auch die Summe der Röhrwände noch um etwas den Becher übertreffen muß. Und wenn zwar bei fortgesetzten Halbirungen der Theile CS; SF; TU; und auch der Theile Cs, st, tu, der Unterschied der Röhrwande, und der Scheiben des Bechers immer kleiner wird, so kann doch einmal die Summe der Röhrwände kleiner, als die Summe der Becherscheiben, oder kleiner, als der Becher selbst werden; folglich kann die Annahme, daß der Becher größer, als die Halbkugel sey, nicht bestehen.

XIII. Es ist demnach der Becher weder kleiner, als die Halbkugel (VIII), weder größer (XII); folglich ist der Becher der Halbkugel gleich.

XIV. Aber der Becher ist = 2 Kegel ACB (III); folglich ist die Halbkugel zweimal größer, als ein Kegel, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 429. Zusatz. Ein Kegel, der eine doppelte Höhe, aber einerlei Grundfläche mit einem andern hat, ist unstreitig zweimal größer, als dieser andere (418). Die ganze Kugel ist unstreitig zweimal größer, als die Halbkugel; aber ein Kegel, der der Halbkugel gleich war, hatte auch nur zur Höhe den Halbmesser; der Kegel demnach, der zur Höhe den Durchmesser der Kugel hat, ist zweimal größer; und ist folglich auch im nämlichen Verhältnisse zur ganzen Kugel, wie der einfache zur halben Kugel.

§. 430.

§. 430. Cylinder, Kugel und Kegel von einer Grundfläche und Höhe verhalten sich demnach wie die Zahlen 3, 2, 1.

§. 431. Lehrsatz. Kugeln von verschiedenen Durchmessern verhalten sich wie die Würfel dieser Durchmesser.

Beweis. Die Kugeln verhalten sich wie die Cylinder, die ihre größten Kreise zu Grundflächen und ihre Durchmesser zu Höhen haben. Aber das Verhältniß der Cylinder ist wie die Produkte aus Höhen in Grundflächen (400, II); daher verhalten sich die Kugeln auch wie solche Produkte. Nun ist aber das Verhältniß ihrer Grundflächen, wie die Quadrate ihrer Durchmesser (265); folglich ist das Verhältniß der Kugeln, wie die Produkte aus den Quadraten ihrer Durchmesser in diese Durchmesser, d. i., wie die Würfel dieser Durchmesser.

Vom Mase und Ausmessen der Körper.

§. 432. Erklärung. Das Mas, womit man einen Körper ausmessen will, muß selbst ein Körper seyn; dieses zeigt der Begriff vom Ausmessen; man will nämlich beim Ausmessen durch eine Zahl angeben, wie vielmal der Masstab, den man als die Einheit braucht, in der zu messenden Sache enthalten sey. Man nehme den Würfel, dessen Seite eine bekannte Länge hat, zum Masstabe an; und die folgenden Säze werden beweisen, daß die Gestalt dieses Masstabes bequem sey, alle die bisher betrachteten Körper auszumessen.

§. 433. Aufgabe. Einen Würfel ABCFH fig. 169. mit dem angenommenen Masstabswürfel x fig. 170. auszumessen.

Auflösung. Man messe mit ab der Seite des Maswürfels die Seite des zu messenden Würfels; und mache die dritte Potenz dieser Zahl Mastheile, diese Potenz, wovon x die Einheit ist, giebt den Inhalt des zu messenden Würfels.

Beweis. Die Grundfläche des auszumessenden Würfels sowohl, als die des Maswürfels sind Quadrate (349, II). Wenn demnach AB mit ab ausmeßbar ist, d.i., wenn AB = k. ab ist, wo k eine ganze Zahl bedeutet, und davon ab die Einheit ist, so giebt die zweite Potenz der Mastheile in AB den Quadratflächeninhalt der Grundfläche (227); aber die Quadratmastheile in ABCD, dergleichen Apqm eines ist, sind gleich der Grundfläche cb des Masstabes x (227); folglich kann auf die Grundfläche ABCD so vielmal x gestellt werden, als cb darinn enthalten ist; d.i. sovielmal, als k^2. $ab^2 = k^2$. 1 beträgt; ~~oder AB^2 x mal~~. Die Höhe cd des Würfels x ist unstreitig = ab; und so werden die auf ABCD gestellten Würfel, wovon jeder = x ist, eine Höhe = cd = ab = Dr im großen Würfel haben. Man heiße diese so gestellten Würfel x, eine Schichte im zu messenden Würfel, so ist begreiflich, daß so viele Schichten im großen Würfel über einander stehen können, als vielmal Dr in DH der Höhe des Würfels HB enthalten ist. Aber DH = AB (394, II); oder DH = k. Dr = k. ab; folglich sind k Schichten im großen Würfel; daß diese Schichten einzeln gleich sind, folgt sowohl aus gegenwärtiger Betrach-

tung

tung, als auch aus (375). Weil aber $ab = 1$, so ist der richtige Ausdruck für die Würfel einer Schichte $k^2 . x$. Um nun zu finden, wie viele Würfel jeder $= x$ im Großen enthalten sind, müßte man die Würfel einer Schichte so vielmal zusammen setzen, als Schichten da sind; d. i. kmal. Nun war aber $k^2 . x$ eine Zahl Würfel jeder $= x$ in einer Schichte anzusehen; daher ist $k . k^2 . x = k^3 . x$ die Zahl aller Maswürfel im großen Würfel; aber bei dieser Zahl ist offenbar x die Einheit.

Anmerkung. Da es zuerst darauf ankömmt, daß die Seite des großen Würfels mit jener des Masstabwürfels ausmeßbar sey; um die Möglichkeit der Aufgabe zu begreifen, so werde hier die Sache, wie in (195) verstanden; und es sey hier ab, was dort Ai war; folglich können hier auf ab, und AB die dortigen Schlüße richtig angewandt werden.

§. 434. Aufgabe. Ein gerades Parallelepipedum, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, mit dem Würfel x fig. 170 auszumessen.

Auflösung. Man suche den Inhalt der Grundfläche in Quadratmastheilen der Seite ab am Würfel x völlig nach (228). Man messe mit ab die Höhe des Parallelepipedum; wobei wieder angenommen wird, (und nach (195) angenommen werden kann), daß sich die Höhe eben so, wie die Länge und Breite der Grundfläche mit ab, d. i. mit einerlei Mase, genau ausmessen lassen.

Man multiplicire die Quadratmastheile der Grundfläche durch die Mastheile der Höhe, so ist dieses Produkt der Körperinhalt des Parallelepipe-

dum

dum in den Würfelmastheilen, wovon x die Einheit ist.

Beweis. Auf der Grundfläche des Parallelepipedum können so viele Würfel x stehen, als sie Quadratmastheile der Seite ab hat; aber die Mastheile der Höhe geben die Menge der Schichten an; die Sache hier genau so genommen, wie (433); daher bringt die angegebene Multiplikation alle Maswürfel des ganzen Parallelepipedum zusammen.

§. 435. Zusatz. Der Beweis setzt einerlei Masabtheilung, oder einerlei Mastheile in Höhe und Grundfläche zum voraus, ohne diese Voraussetzung aber würde er nicht können gegeben werden.

§. 436. Zusatz. Das schiefe Parallelepipedum ist dem geraden gleich; wenn ihre Grundflächen und Höhen gleich sind (380). Aber das gerade läßt sich messen (434), und sein Inhalt, statt des vom schiefen, brauchen. Hieraus aber wird es zugleich deutlich, daß man die senkrechte Höhe des schiefen in der Multiplikation brauchen müsse.

§. 437. Zusatz. Der Inhalt eines dreieckigten Prisma ist daher auch ein Produkt (die Faktoren, wie in (434) genommen), von seiner Grundfläche in die Höhe (387); weil seine Grundfläche für sich schon der halbe Faktor ist, der er nach dem Satze (387) seyn muß.

§. 438. Zusatz. I. So ist nun auch der Inhalt eines jeden vielseitigen Prisma einem Produkte aus dessen Höhe und Grundfläche, gleich. Denn die dreieckigten Prismen, in die es sich zertheilen läßt (392), haben gewiß alle einerlei Höhe; daher könnte man jedes einzeln berechnen, und ihre Sum-

me

me würde der ganze Inhalt seyn; allein die Summe ihrer dreieckigten Grundflächen in die gemeinschaftliche Höhe multiplicirt, giebt ein Produkt, welches sie alle auf einmal bringt (Rechenk. 181. Zusatz).

II. Die Inhalte der Cylinder sind daher auch Produkte aus ihren Höhen in ihre Grundflächen; immer nur die Mastheile gehörig verstanden (435).

§. 439. Zusatz. Der Inhalt der Pyramide ist daher der dritte Theil des Produktes aus seiner Höhe in seine Grundfläche (416). Eben das gilt von Kegeln (420).

§. 440. Zusatz. Den Inhalt der Kugel = k zu finden; sucht man zuerst die größte Kreisfläche, welche sich aus ihrem bekannten Durchmesser finden läßt (260), und multiplikirt solche mit $\frac{2}{3}$ des Durchmessers (430).

§. 441. Zusatz. Der Inhalt der größten Kreisfläche C ist $= \frac{P.d^2}{4}$ (262); daher der Inhalt der Kugel $= \frac{2}{3} d \times \frac{P.d^2}{4} = \frac{2}{12} P . d^3 = \frac{1}{6} P . d^3$ $= 0{,}5235971 \ldots \times d^3$. Oder auch, weil $\frac{P.d^2}{4}$ $= \frac{p\,d}{4}$; so ist $K = \frac{1}{6} pd^2$.

Anmerk. Den Durchmesser einer gegebenen Kugel, wie sie etwa die Kunst aus gewissen Stoffen bildet, findet man entweder vermittels eines Tasterzirkels; oder auch, wenn man die Kugel zwischen zwei ebene parallele Bretter bringt, wo

im



im letzten Falle der Abstand dieser Bretter dem Durchmesser der Kugel gleich ist; so findet man auch die Höhe der Pyramiden und Kegel, wenn man ihre Grundflächen erweitert; dann durch ihre Spitzen, Ebenen mit der Grundfläche parallel anbringt; in diesem Falle ist der Abstand solcher Ebenen die Höhe der Pyramiden (409).

§. 442. Anmerk. Wird auch bei der Seite des Masstabswürfels die zehntheilige Unterabtheilung (§. 26) angenommen, so folgen die Abtheilungen des Körpermases nach tausendtheiligen Unterabtheilungen; d. i., Tausendtheile der nächstkleinern Abtheilung machen einen Theil der nächsthöhern Abtheilung aus. Z. B. 8,5×2,9×0,6=14,790.

Daß übrigens die drei Linien, deren Mastheile als Faktoren bei der Körperberechnung gebraucht werden; in einerlei Masabtheilung müßen genommen werden, versteht sich aus (435). Wenn man daher bei einem Parallelepipedum folgende Mase hätte: Grundseiten an der Grundfläche = 4,3; die Breite der Grundfläche = 0,95; die Höhe des Parallelepipedum = 8, 432; so müßte man folgende Zahlen 4, 300 und 0, 950; und 8, 432 in der Multiplikation brauchen, und das Produkt wird seyn 34,444720000, oder 34 Würfelmastheile von der Art, wie es die Ganzen waren; 444 Würfelmastheile der ersten zehntheiligen Abtheilung; 720 von der zweiten, und 000 von der dritten Abtheilung. Wären, die, ganze Ruthen; und man hieße die folgenden Abtheilungen, Fuße, Zolle, Linien; so hiese die obige Zahl 34 Würfelruthen; 444 Würfelfuße, 720 Würfelzolle, u. s. w.

§. 443. Aufgabe. Den Inhalt der cylindrischen Röhrwand (422) zu finden.

Auflösung. Der ganze Cylinder heiße C; der kleine, der die Röhröfnung ausfüllt, heiße c. Der Durchmesser in der Grundfläche des ersten sey $=D$; Höhe $=H$; des andern Durchmesser heiße d; die Höhe ist auch H. Nun ist $C=\frac{P.D^2\times H}{4}$; und

$c=\frac{P.d^2\times H}{4}$, und die Röhrwand $=C-c=$

$$D^2\times\frac{P.H}{4}-d^2\times\frac{P.H}{4}=(D^2-d^2)\times\frac{P.H.}{4}$$

Man wird leicht die gehörigen Zahlen, bei den gegebenen Dingen, statt der Buchstaben, setzen, und die Rechnung nach (442) machen können.

§. 444. Aufgabe. Eine abgekürzte Pyramide ABCDdabc fig. 171 zu berechnen, worinn die Fläche des Abschnittes abcd mit der Grundfläche parallel ist.

Auflösung. Man suche den Inhalt der ganzen Pyramide ABCDE; und auch den Inhalt der kleinen abcdE, welche weggeschnitten ist, und ziehe den letzten Inhalt vom ersten ab.

Zur Berechnung beider Pyramiden sind zwar die Grundflächen da; aber die Höhen fehlen, nur hat man hH die Höhe der abgekürzten. Man stelle sich vor, die Seitenlinien Aa, Bb, u. s. w. träfen verlängt in E zusammen; welche Vorstellung in der Voraussetzung, daß der Körper eine abgekürzte Pyramide sey, hinlänglich gegründet ist. Durch E eine Ebene EF, parallel mit der Grundfläche gelegt, giebt die FH der ganzen, und die Fh der

klei=

kleinen Pyramide an. Nun hat man aber, weil der Schnitt abcd parallel mit der Grundfläche geführt ist, folgende Proportion:

EA : Ea = AB : ab (205), und wegen (330) EA : Ea = FH : Fh; daher AB : ab = FH : Fh; und hieraus AB — ab : AB = FH — Fh (= hH) : FH; und so wird nun FH aus den drei bekannten vordern Gliedern dieser Proportion gefunden; weil ja die Linien, die in diesen vordern Gliedern vorkommen, ohne Hinderniß können gemessen werden. Der Inhalt der ganzen Pyramide ist demnach = Grundfl. AC × $\frac{1}{3}$FH = P.

Ferner ist FH — hH = Fh = der Höhe der kleinen Pyramide. Und der Inhalt dieser kleinen Pyramide ist = Grundfl. ac × $\frac{1}{3}$Fh = p; folglich der Inhalt der abgekürzten Pyramide = P — p.

§. 445. Aufgabe. Den Inhalt eines parall. abgekürzten geraden Kegels ABba fig. 172 zu finden.

Auflösung. Es kömmt hier, wie in der vorigen Aufgabe, darauf an, die Höhe DC des ganzen, und Dc des kleinen Kegels zu finden. Durch die Spitze D des Kegels, und den Durchmesser AB der Grundfläche kann eine Ebene gelegt werden (295), und bildet daher das geradlinigte △ ADB. Aber diese Ebene schneidet auch in der obern Grundfläche des abgekürzten Kegels in ab ein, und ab ist auch ein Durchmesser in der obern Grundfläche.

In der Ebene ADB liegt auch die Achse DC (292); und folglich der Mittelpunkt c der obern Grundfläche (363), und so ist ab der Durchmesser (27). Nun ist DA : Da = DC : Dc und DA

: D a = AB : ab (205); folglich AB : ab = DC : Dc, oder AB — ab : AB = DC — Dc (= Cc) : DC; und so wird hier auch DC aus den drei ersten bekannten Gliedern der Proportion gefunden. Es ist demnach der ganze Kegel = Kreisfläche AB $\times \frac{1}{3}$ DC = K, und weil Dc = DC — Cc, so ist der kleine Kegel = k = Kreisfl. ab $\times \frac{1}{3}$ Dc, und der abgekürzte = K — k.

Es sey AB = 2 R; ab = 2 r; Cc = a, so ist $DC = \frac{2 . R . a}{2(R - r)} = \frac{R . a}{R - r}$; aber die Kreisfläche von AB ist = $R^2 . P$ (262), folglich $K = . \frac{P . R^2 . R . a .}{R - r}$

Nun ist $Dc = \frac{R . a}{R - r} - a = \frac{R a - R a + a r}{R - r} = \frac{r a}{R - r}$; und auch ist die Kreisfläche von ab = $r^2 . P$;

folglich $k = \frac{1}{3} . \frac{P . r^2 . a r}{R - r}$; folglich nun K — k =

$\frac{1}{3} P . a . \frac{R^3 - r^3}{R - r}$; aber $\frac{R^3 - r^3}{R - r} = R^2 + R r + r^2$ (Rechenkunst. 183.); und so ist $K - k = \frac{1}{3} . P . a . (R^2 + R r + r^2)$.

Anmerk. Daß bei schiefen abgekürzten Kegeln auf die nämliche Weise verfahren werde, erhellet schon daraus, weil sie als Pyramiden können angenommen werden; und von letztern giebt (444), die Auflösung allgemein, ohne daß die Gestalt der Pyramide dabei in Betracht komme. Allein da der schiefe Kegel schon gewöhnlich eine Grundfläche hat, deren Figur (es ist gewöhnlich eine ellipti-

ptische Fläche) in den Anfangsgründen der Geometrie nicht betrachtet wird, so läßt sich auch hier nicht beweisen, daß, obschon man wie in der vorigen Aufgabe, durch eine Ebene ABD zwar ein △ erhalte, aber auch diese Ebene in der obern Grundfläche des abgekürzten Kegels eine Linie ab einschneide, welche so wie die untere AB in ihrer Grundfläche ähnlich liegt; worauf doch das ganze Verfahren sich gründet.

Vom Ausmessen der Oberflächen, der bisher betrachteten geometrischen Körper.

§. 446. Aufgabe. Die Oberfläche prismatischer Körper zu finden.

Auflösung I für gerade Prismen. Man multiplicire den Umfang der Grundfläche (die Summe der Grenzlinien der Grundfläche) mit der Höhe des Körpers; dieses Produkt giebt die Seitenflächen, wozu man die obere und untere Grundfläche, deren Inhalt nach (231) zu finden ist, addirt.

II. Für schiefe Prismen. Man nehme die Summe der Grenzlinien, die sich in einem, auf die Seitenlinien des Prisma senkrecht geführten Schnitte geben, zum einen, und die schiefe Seitenlinie zum andern Faktor; das Produkt giebt die Seitenflächen, wozu wieder, wie in I, die obere und untere Grundfläche addirt werden.

Beweis. I. Die Seitenflächen der geraden Prismen sind Parallelogramme (344) und ihre Seitenlinien nicht nur alle gleich (das. III), sondern

auch senkrecht auf den Grenzseiten der Grundfläche. Die Grenzseiten der Grundflächen sollen heißen a, b, c, d, u.s.w.; die Seitenlinie $=H$; so erhält man die Seitenparallelogramme $a\times H+b\times H+c\times H+d\times H$ u.s.w. $=H\times(a+b+c+d)$ (Rechenk. 182. Zus.)

II. Wenn der Schnitt senkrecht auf eine Seitenlinie des schiefen Prisma geführt ist, so ist dieser Schnitt senkrecht auf allen (311, II); aber hierdurch werden die gleichen Seitenlinien wieder die Höhe der Parallelogramme (oder, wenn man will, die Seitenlinien werden die Grundlinien der Seitenparallelogramme am Prisma, und die Grenzlinien im senkrechten Schnitte die andere, zu Berechnung der Parallelogramme, erfoderlichen Linien) und so ist das Verfahren, und der Beweis mit I einerlei.

§. 447. Zusatz. Bei Parallelepipeden sind zwo gegenüberliegenden Grenzlinien an der Grundfläche gleich; daher findet einige Abkürzung darinn statt, daß man nicht eben alle Grenzlinien am Grunde zu messen braucht.

§. 448. Zusatz. Daß die nämliche Auflösung bei geraden und schiefen Cylindern statt habe, erhellet aus (355). Die Seite am Cylinder ist eine jede gerade Linie, die auf der Seitenfläche des Cylinders zwischen dessen beiden Grundflächen statt hat. Man erhält demnach die Seitenfläche des Cylinders, wenn man die Seite desselben mit dem Kreise multiplicirt, auf welchem diese Seite senkrecht steht. Ist demnach der Durchmesser am Grundkreise $=d$, so ist dieser Kreis $=P.d$ (259). Die Seite des Cylinders heiße L, so ist die Seitenfläche $=P.d.L.$

§. 449.

§. 449. Aufgabe. Die Seitenfläche einer jeden Pyramide zu finden.

Auflösung. I. Die Pyramide sey die in (360) genannte; so ist aus dort klar, daß die Seitendreiecke alle $\cong$ sind; auch die senkrechte Höhe Hm ist in diesen Dreiecken allen gleich; daher ist die Fläche eines jeden, einem Produkte aus dieser Hm in eine Seitenlinie an der Grundfläche gleich; und folglich dieses Produkt n mal genommen, (wenn n die Zahl der Seiten der Grundfläche bedeutet) giebt den Inhalt aller zusammen, worzu man die Grundfläche addiren kann.

II. Wenn die Grundfläche eine irreguläre Figur ist, so sind die Seitendreiecke ungleich (361) und man muß jedes insbesondere berechnen, und ihre Flächen addiren, um die ganze Seitenfläche der Pyramide zu haben.

§. 450. Zusatz. Im geraden Kegel sind alle gerade Linien aus seiner Spitze an den Grundkreis gleich (358). Man ist aber auch berechtigt, die krumme Oberfläche des Kegels für eine aus einer unzähligen Menge gleichschenklichter, aber unendlich schmaler Dreiecke bestehenden Fläche anzunehmen, weil seine Grundfläche als ein Unendlicheck kann angenommen werden (260, I). In allen diesen Dreiecken ist aber die Seite des Kegels zugleich die Höhe; denn, wie in (358) erwiesen ist, daß die Entstehung des Kegels vom gedrehten rechtwinklichten Dreiecke begriffen werden könne, folgt, daß dieses Dreieck immer auf der Grundfläche senkrecht sey; und daher die Neigung der Hypothenuse, welche eigentlich die Seite des Kegels ist, als Linie in einer senkrechten Ebene, zu beiden Seiten mit

der Grundfläche rechte Winkel machen muß. Daher erhält man die Summe dieser unzählig vielen Dreiecke, wenn man den Grundkreis mit der halben Seite des Kegels multiplicirt. Beide Linien, die als Faktoren bei der Berechnung gebraucht werden, sind leicht zu haben; der Grundkreis nämlich aus (259), und die Seite durch Messung von der Spitze des Kegels an einen Punkt dieses Kreises.

§. 451. Zusatz. Die Oberfläche des parallel abgekürzten geraden Kegels AabB fig. 172 besteht daher aus einer unzähligen Menge paralleler Trapezien, deren gesammter Inhalt gefunden wird, wenn man die Seite Aa in die halbe Summe der beiden Grundkreise multiplicirt. Denn ein jedes solches Trapez wäre ein Produkt aus Aa in die halbe Summe der zwei unendlich kleinen Kreistheilchen, wovon eines im obern, und das andere im untern Grundkreise liegt (172). Diese obern und untern Kreistheile alle, die zu allen solchen Trapezen gehören, machen ohne Zweifel den obern und untern Kreis aus; daher ihre halbe Summe der halbe obere und untere Kreis ist; und alle haben die Höhe $= Aa$.

§. 452. Zusatz. Man führe in dem abgekürzten Kegel einen Schnitt $\alpha\beta$ parallel zwischen den beiden Grundflächen, und in der Mitte von Aa; so daß $A\alpha = \alpha a$ ist. Die, den Kegel spaltende Ebene ADB (445) sey auch eingelegt, sie wird in dem Kreise $\alpha\beta$ im Durchmesser derselben einschneiden, weil sie durch die Achse, und folglich durch den Mittelpunkt geht (358); daher hat man $A\alpha : \alpha a = C\gamma : \gamma c$; und $\gamma C = \gamma c$; weil $A\alpha = \alpha a$ ist; aber ca; $\gamma\alpha$; CA sind Halbmesser der Kreise in die-

diesen Schnitten, und sie liegen in einer Ebene AacC. Man ziehe in dieser Ebene die Linie AC; sie schneidet $\alpha\gamma$ in m. Nun ist $A\alpha : Aa = Am : Ac = \alpha m : ac$, und weil $A\alpha = \frac{1}{2} Aa$, so ist $\alpha m = \frac{1}{2} ac$; auch ist $Am : Ac = m\gamma : AC$; daher auch $m\gamma = \frac{1}{2} AC$; folglich $\alpha m + m\gamma = \alpha\gamma = \frac{1}{2} ac + \frac{1}{2} AC$; und weil die Kreise sich wie die Halbmesser verhalten, so ist der Kreis von $\alpha\gamma = \frac{1}{2}$ Kreis von ac + dem $\frac{1}{2}$ Kreise von AC; folglich ist der Kreis von $\alpha\gamma$ die mittlere arithmetische Proportionalgröße zwischen dem obern und untern Grundkreise (Rechenk. 343). Nun war die Summe rechter Hand der eine Faktor in (451); daher ist auch die abgekürzte Kegelfläche ein Produkt, aus der Seite des abgekürzten Kegels in den mittlern Kreis zwischen beiden Grundkreisen. Der Ausdruck dieser Fläche ist $Aa \times$ Kreis von $\alpha\gamma$.

§. 453. Lehrsatz. Die Oberfläche der Kugel besteht aus einer unzähligen Menge abgekürzter Kegelflächen.

Beweis. In der 173ten Figur sey FBE der Halbkreis, der bei Umdrehung um den festen Durchmesser FE die Oberfläche der Kugel hervor bringt (364); ke sey ein unendlich kleines Theilchen des Kreises, welches man etwa, wie durch eine unzählige Menge Halbirungen des Kreises gefunden hat; und welches daher für eine gerade Linie angesehen werden kann. Weil nun ein Halbmesser Ca an dieses Theilchen gezogen auf ihm senkrecht steht (182, II), so ist ke für ein Stückchen einer Tangente anzusehen, welches verlängt, auch mit dem verlängten Durchmesser in A zusammenstossen wird; indem hier angenommen wird, ab sey zwischen

den Endpunkten des Quadranten FB angenommen, und daher $\measuredangle$ FCa < 90°; folglich werden CA und aA zusammen treffen (99, I). Man lasse von k und e die senkrechten km, en, ao auf den Halbmesser CF; und man stelle sich nun vor, bei der obigen Umdrehung werde zugleich das rechtwinklichte Dreieck Aen mit gedreht, welches einen Kegel beschreibt; und Ae die Kegelfläche (358); aber en, km, ao werden parallele Kreise beschreiben (367); folglich beschreibt ke die abgekürzte Kegelfläche. Aber solcher ke giebt es eine unzählige Menge im Quadranten FB. Eben so wird nun die Sache im Quadranten BE verstanden; nur daß hier die verlängten ke mit dem auch verlängten Halbmesser CE auf der Seite gegen E zusammen stossen. Daß übrigens der Zusammenstoß der gedachten Linien immer erfolge, wenn a zwischen den Endpunkten des Quadranten liege, ist erwiesen.

Wenn aber a in B fiele, so würde freilich der Zusammenstoß in Rücksicht des a nicht mehr statt haben (100); aber weil e noch immer von k entfernt liegen soll, daß ke nicht ein Punkt, sondern noch eine Linie, obschon unendlich klein seyn soll, so hat dann in Rücksicht des Punktes e der Zusammenstoß, und zwar auf der entgegengesetzten Seite statt, und in Rücksicht k würde er immer noch oben erfolgen.

§. 454. Lehrsatz. Die Oberfläche der Kugel ist ein Produkt aus dem Durchmesser der Kugel in ihren größten Kreis.

Beweis. Wenn, wie im vorigen Bewise dargethan wurde, ke eine von der unzähligen Menge abgekürzter Kegelflächen beschreibt, so würde diese Fläche seyn = ke multiplicirt in den Kreis, welcher

in

in der Mitte zwischen den beiden von km und en entstandenen, liegt (452). Es sey der Kreis von ao; so ist ke $\times$ Kreis ao $=$ Z, wo Z die abgekürzte Kegelfläche bedeutet. Dieser Ausdruck für den Inhalt der unendlich schmalen abgekürzten Kegelfläche ist unbequem, weil er kein Mittel an die Hand giebt, wie man aus ihm alle solche Kegelflächen, woraus die Kugelfläche besteht, finden könne. Man muß daher einen andern, ihm gleichen, aber bequemern suchen.

Man ziehe kf parallel AC, sie trift en in f (178, III), und so ist kf senkrecht auf en (102, III), auch ist, weil ke ein Stück der Tangente Ae ist, $\triangle$ enA $\backsim$ $\triangle$ efk $\backsim$ $\triangle$ ark $\backsim$ $\triangle$ aAo; und $\sphericalangle$ ekf $=$ $\sphericalangle$ A, auch $\sphericalangle$ e $=$ $\sphericalangle$ a (205); aber $\triangle$ aAC ist bei a rechtwink.; und ao senkr. auf CA; daher ist auch $\triangle$ aAo $\backsim$ $\triangle$ aoC (211), und $\sphericalangle$ C $=$ $\sphericalangle$ Aao $=$ $\sphericalangle$ e; daher $\triangle$ kef $\backsim$ $\triangle$ aoC; folglich ke : kf $=$ aC : ao; aber aC und ao sind Halbmesser; der erste nämlich von dem mittlern Kreise in der abgekürzten Kegelfläche; der andere von dem größten Kugelkreise; und man kann daher setzen aC : ao $=$ Kreis von aC : Kreise von ao (258), und aus der obigen Proportion wird ke : (kf $=$ mn) $=$ Kreis von aC : Kreise von ao; folglich ist ke $\times$ Kreis von ao $=$ mn $\times$ Kreise aC (Rechenkunst 110); daher giebt das letzte Produkt auch Z. Man hat aber gewiß soviele abgekürzte Kegelflächen in beiden Halbkugeln, als man unendlich kleine mn in beiden Halbmessern annehmen kann. Der Beweis zeigt, daß jede auf die nämliche Art berechnet werde. Sie haben daher einen Faktor, nämlich den Kreis von aC, oder den größten Kugel-

gel-

gelkreis gemein. Ihre Summe ist daher ein Produkt aus diesem Kugelkreise in die Summe der mn (Rechenk. 182, Zus.), d. i., ihre Summe ist ein Produkt aus dem größten Kugelkreise in den Durchmesser.

§. 455. Zusatz. Nimmt man die mn gleichgroß (und das sind sie ihrer Natur nach, als unendlich kleine Linien); so sind die unendlich schmalen abgekürzten Kegelflächen alle gleich; ihre Anzahl aber bestimmt sich immer durch die Menge der mn. Man ist daher berechtigt, anzunehmen, daß sich ein jedes Stück Kugelfläche zur Kugelfläche verhalte, wie sich verhält das senkr. Stück Durchmesser zwischen den beiden Grundflächen der Kugelscheibe (die eigentlich von diesem Stücke Kugelfläche zur Seite begränzt wird) zum ganzen Durchmesser.

Exempel. Das Stück Kugelfläche zwischen dem Kreise aq und F, verhält sich zur ganzen Kugelfläche, wie Fo zu FE; und das Stück zwischen aq und BG ist zur ganzen Kugelfläche, wie oC zu FE, u. s. w. Der Inhalt der eben genannten Stücke Kugelfläche wird so gefunden: Der größte Kreis der Kugel heiße p, so ist das erste $p \times Fo$; das andere $p \times Co$; wo Fo und Co gemessen seyn müßen.

§. 456. Zusatz. Der Durchmesser der Kugel sey gegeben, und $= d$; so ist der größte Kreis $= P . d$ (das P nach (§ 250) genommen); folglich ist die Kugelfläche $= P . d^2$. Die größte Kreisfläche im Schnitte der Kugel (369) ist $= \frac{P . d^2}{4}$; folglich ist der Kugel Oberfläche, viermal größer, als diese größte Kreisfläche.

§. 457. Zusatz. Wenn ein gerader Cylinder mit der Kugel einerlei Durchmesser im Grundkreise, und einerlei Höhe hat, so ist seine Seitenfläche der Oberfläche der gedachten Kugel gleich. Denn seine Seitenfläche ist $= P \cdot d^2$ (448), weil hier $d = L$ in (448) ist; und eben so groß ist die Kugelfläche.

Exempel. Die Erde als eine Kugel angenommen, (ein kugelförmiger Körper ist zwar die Erde; aber eine richtige Kugel ist sie nicht; man sehe Kästners Geographie im zweiten Theile seiner angewandten Mathematik), so weiß man durch Messungen, daß des Aequators Länge 5400 deutsche Meilen betrage; also hat man zur Berechnung der Erdoberfläche den Umfang eines größten Kreises von ihr; und $d = \frac{1}{P} 5400$; folglich die Erdoberfläche $= P \cdot \left(\frac{1}{P} \cdot 5400\right)^2 = \frac{1}{P} \cdot 29160000 =$ $0{,}318309886183 \ldots \times 29160000 = 9281916{,}28049628$ Quadratmeilen. In dieser Zahl ist die Stelle von der —4ten Ordnung noch richtig, die übrigen sind etwas zu klein (Rechenk. 172).

§. 458. Zusatz. Die Oberfläche der Kugel kann angenommen werden, als bestünde sie aus einer unzähligen Menge ebener, aber unendlich kleiner Dreiecke; hierzu berechtigt die Gestalt eines unendlich kleinen Theilchen eines Kreises, der auf der Kugelfläche gezogen ist, und wovon das unendlich kleine Theilchen, einem solchen Dreiecke zur Grenzlinie dient. Von den Winkelpunkten dieser unendlich kleinen Dreiecke, Halbmesser gezogen, bilden Pyramiden, die ihre Spitzen alle im Mittelpunkte der Kugel haben. Diese Pyramiden haben

ben gewiß einerlei Höhe, nämlich den Halbmesser der Kugel; und ihre gesammten Grundflächen machen die Kugefläche aus; daher erhält man ihren gesammten Inhalt, wenn man die Kugelfläche mit dem dritten Theile des Halbmessers, d. i. mit dem sechsten Theile des Durchmessers multiplicirt. Oder ihr gesammter Inhalt ist $= P \cdot d^2 \frac{1}{6} d = \frac{1}{6} P \cdot d^3$, welches mit (441) übereinstimmt.

§. 459 Zusatz. Weil die Pyramiden, die nach (458) die Kugel ausmachen, alle einerlei Höhe haben; auch bei allen gleiche Grundfläche anzunehmen ist; so verhält sich ein Theil dieser Pyramiden zu ihrer ganzen Summe, wie das Stück Kugelfläche, das dem Theile der gedachten Pyramiden zur Grundfläche dient, sich verhält zur ganzen Kugelfläche. Denn wenn man $\frac{1}{n}$ der gedachten Pyramiden annimmt, so ist offenbar der Ausdruck ihres Inhaltes $= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} P \cdot d^3$; und $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} \cdot P \cdot d^3 : \frac{1}{6} P \cdot d^3 = \frac{1}{n} \cdot P \cdot d^2 : P \cdot d^2$.

§. 460 Aufgabe. I. Den Kugelausschnitt DFGhkC fig. 174; II den Kugelabschnitt FkGhD; III den Abschnitt AFGB zu finden.

Auflösung. I. Man suche das Stück Kugelfläche FhGkD; es ist $p \times DE$ (455), wo DE gemessen seyn muß; man multiplicire dieses nochmal mit $\frac{1}{3}$ DC (459). Es sey $DC = r$; und $DE = a$; so ist der gedachte Ausschnitt $= p \cdot a \cdot \frac{1}{3} r = \frac{2}{3} a \cdot r^2 \cdot P$; weil $p = 2r \cdot P$ ist (262).

II.

II. Weil der Ausschnitt aus dem Abschnitte und dem Kegel FhGkC zusammengesetzt ist; so wird der Abschnitt herauskommen, wenn man den Kegel von dem Ausschnitte abzieht. Der Kegel heiße K, so ist sein Inhalt = Kreisfläche FG $\times$ $\frac{1}{3}$ EC. Bei allen diesen Berechnungen sey ED bekannt, woraus sich FE und EC haben finden lassen (212).

Es sey nämlich ED = a, so ist EC = r — a und $EG^2 = r^2 - (r-a)^2 = 2ar - a^2$.

Folglich der Kreis von EG, der dem Kegel FCG zur Grundfläche dient, ist $= (2ar - a^2).P$; und der Inhalt des Kegels selbst $= \frac{1}{3}.(r-a).((2ar - a^2).P) = \left(\frac{2ar^2}{3} - \frac{3a^2r}{3} + \frac{a^3}{3}\right).P$ $= \frac{1}{3}a.(2r^2 - 3ar + a^2).P$; folglich der Ausschnitt — dem Kegel = dem Abschnitte FkGhD $= \frac{1}{3}a.(2r^2.P) - \frac{1}{3}a.(2r^2 - 3ar + a^2).P = \frac{1}{3}a.P(3ar - a^2) = \frac{1}{3}a^2.P(3r - a)$.

III. Wollte man die Kugelscheibe (Zonenabschnitt) AFGB finden, so ist dieses nun, weil der Abschnitt FkGhD bekannt ist, auf folgende Art möglich. Denn es ist die Halbkugel — dem Abschnitte FkGhD = der Kugelscheibe AFGB. Die Halbkugel ist $\frac{1}{2}.\frac{1}{6}.P.d^3 = \frac{1}{12}P.d^3 = \frac{2}{3}.P.r^3$, weil $d^3 = 8r^3$; folglich ist die Kugelscheibe $= \frac{2}{3}r^3.P - \frac{1}{3}a^2.P.(3r - a) = \frac{1}{3}P.(2r^3 - 3a^2r + a^3)$.

Einige

Einige Anwendungen der bisherigen Lehren, für die Ausmessung natürlicher Körper.

§. 461. Bei den Ausrechnungen der Körperräume, besonders deren, wie sie die Natur bildet, findet man Schwierigkeiten, die oft nicht zu heben sind. Wenn man etwa den Körperinhalt eines Berges, eines Hügels, wie solche auf einer in Größe unbestimmten Horizontalfläche liegen, ausrechnen sollte, so fällt es sogleich in die Augen, daß diese Körper in Gestalt gar zu sehr von den geometrischen, und in den vorhergegangenen Lehren betrachteten Körpern, abweichen. So verhält es sich mit Vertiefungen, etwa mit Gruben, die von der Natur, durch Wasserfluthen, oder Vulkane gebildet sind, so mit Sümpfen u. d. g.

Wenn nun etwa ein Berg durch einen horizontalen Weg; durch einen Graben zur Wasserleitung, sollte durchgegraben werden; wenn ein Hügel, er sey lockere Erde, oder felsenartig zum ökonomischen Gebrauche sollte geebnet; wenn eine Grube, oder Sumpf zu eben solcher Absicht sollte ausgefüllet werden; so ist es doch wohl deutlich, daß ein kluger Unternehmer vorher nach dem Kostenaufwande frage, um zu sehen, ob auch das Werk nach der Vollendung des Aufwandes werth sey; folglich wird dazuerst die Frage um die Größe dieser Dinge seyn.

Man wird gewiß in den Berechnungen dieser Dinge scharfe Genauigkeit nicht fodern, wenn man nur mäßig billig seyn, und das Unmögliche zu leisten,

sten, nicht fodern will. Ich will im folgenden einige Versuche machen, wie etwa solche Körperausmessungen anzustellen sind, daß wenigstens einigermaßen der Sache genug gethan werde. Zuerst aber folgen einige Anwendungen, die meistens im Vorhergegangenen ihren Grund haben.

§. 462. Aufgaben. I. Den Körperinhalt einer geraden Mauer;

II. Den Inhalt der Mauer an einem runden Thurme;

III. An einem Thurme, der ein reguläres Prisma bildet, zu finden.

Auflösung. Die Seite an der Mauer wird als Grundfläche zu erst gesucht, und diese Grundfläche mit der Dicke der Mauer multiplicirt; mit der Beobachtung, daß man einerlei Masabtheilung in den Faktoren annehme (435).

Sollte die Mauer nicht durchaus gleich dick seyn, wie es die Stockwerksmauern an Gebäuden sind, so werden die Stücke, die gleiche Dicke haben, einzeln berechnet, und nachher ihr gesammter Inhalt durch Addition dieser einzelnen Stücke gefunden.

Wäre es die Mauer an einem viereckigten Gebäude, so darf man nur an zwo gegenüberliegenden Seitenwänden die ganze Fläche nehmen, bei den andern beiden gegenüberliegenden Seitenwänden muß die Fläche einer jeden um zwei Parallelogramme, die die Breite der Mauerdicke haben, schmäler genommen werden.

Befinden sich in einer solchen Mauer Oefnungen, wie etwa Thüren und Fenster, so wird deren

Inhalt besonders berechnet, und vom gefundenen Mauergehalte abgezogen. Gewöhnlich verengen sich solche Oefnungen nach aussen, und müßen daher wie abgekürzte Pyramiden, oder, nach Umständen auch, wie Prismen berechnet werden, deren Grundfläche auf dem Lichten der Mauerdicke sich befindet; wobei aber beobachtet werden muß, daß die obere Grundfläche mit der untern parallel angenommen werde. Bei dieser Annahme der obern Grundfläche bleibt gewöhnlich die runde gewölbte Oefnung noch übrig. Sie kann als ein Stück abgekürzten Kegels betrachtet werden, dessen Grundflächen Zirkelabschnitte sind. Man kann die ganzen Grundkreise sowohl, als die Abschnitte finden, wenn man die gerade Linie des Gewölbebogens als Senne, und auf deren Mitte die senkrechte Höhe dieses Bogens nimmt, und nach (212, III) verfährt. Daß aber sich das Stück abgekürzten Kegels, zum ganzen abgekürzten Kegel verhalte, wie der Zirkelabschnitt, der dem Stücke zur Grundfläche dient, zu der ganzen Zirkelfläche, wovon der Abschnitt ein Theil ist; folgt, weil es gleichartige Körper von einerlei Höhe sind (420).

II. Eine runde Mauer mit innerer Oefnung, dergleichen es auch bei ausgemaurten Brunnen giebt, ist offenbar eine cylindrische Röhrwand; und da zeigt (423), was bei ihrer Berechnung zu beobachten ist.

III. Auch diese Art Mauer wird nach eben der Art, wie in (II) gefunden, wenn man nämlich das ganze reguläre Prisma, welches aus der Wand und innern Holung besteht, und das innere dann,

wel-

welches eigentlich die Holung macht, jedes einzeln berechnet, und das innere vom Ganzen abzieht.

Anmerk. Die vorigen Aufgaben können ihren Nutzen bei Bauanschlägen haben. Hierbei können nun auch noch Berechnungen von dem Inhalte der Gewölbe vorkommen. Ein Gewölbe wird aber entweder als ein Stück Cylinder oder Kegelwand, oder als ein Stück von einer Kugelkapsel angesehen werden. Hat die Krümmung des Gewölbes eine andere, als die des Zirkels, so können diese Anfangsgründe zu solchen Berechnungen keine Weisung geben. Für die cylindrischen und Kegelwandstücke zu berechnen, findet man im Vorhergehenden die nöthige Weisung; für die Kugelkapsel erhellet die Sache leicht, daß man zuerst das ganze Kugelstück (460, II), welches aus der Hölung, und dem Gewölbe selbst besteht, und hernach das Kugelstück, welches eigentlich die Hölung ausmacht, jedes einzeln berechne, und letzteres von ersterm abziehen müße.

§. 463. **Aufgabe. Einen keilförmig zugehenden Abschnitt eines Parallelepipedum, oder eines Prisma zu finden.**

Auflösung. I. Es sey abcdefc fig. 175 ein solcher Abschnitt, wo bei cf die Keilschärfe ist. Der Kopf des Keiles abed muß hier ein Parallelogramm seyn, denn ab parallel de; weil es Stücke von den Seitenlinien des Parallelepipedum sind (347). Nun sollen bcfe, und acfd Ebenen seyn, so sind die gegenüberliegenden Linien in ihnen parallel (324); folglich be par. cf par. ad (312); und so ist abed ein Parallelogramm (115, I). Aber weil auch aus den eben angeführten Gründen ac = df; bc = ef; ab = de, so ist △ abc ≅ △ def (66); so ist der gegenwärtige Keil af ein

dreieckigtes Prisma, dessen Grundflächen die gedachten Dreiecke sind; seine Berechnung geschieht nach (437). Dieser Keil kann richtig heißen.

II. Wäre noch alles wie in (I); nur gh nicht parallel mit abc, so, daß auch abc nicht ≅ gkh; so lege man durch k die Ebene lkm parallel mit abc; so ist alkbcm der Keil in (I). Aber lghmk ist eine viereckigte Pyramide über der Grundfläche lghm und ihre Spitze ist k. Diese Pyramide insbesondere nach (439) berechnet, und ihren Inhalt zu dem richtigen Keile am addirt, giebt den gesammten Inhalt.

III. In (II) wurde angenommen, daß die Schärfe ch des dortigen keilförmigen Stückes größer sey, als jede Seite am Kopfe; nun sey wieder noch alles, wie in (II) nur in der 176ten Figur die Schärfe rt kleiner, als jede Seite am Kopfe. Man lege eine Ebene xtv durch t parallel mit pqr, um den Körper pt, der eben der, wie in (I) ist, zu haben. Aber hiebei wird eine Pyramide wſxvt entstehen, die zur Grundfläche das □ wſxv und ihre Spitze in t hat. Der Inhalt dieser Pyramide und der, des richtigen Keiles pt zusammen, machen den ganzen Inhalt aus.

IV. In den bisher betrachteten Fällen war am Kopfe des Keiles, welcher der Schärfe gegenüber liegt, entweder ein Parallelogramm, wie in (I), oder ein paralleles Trapez, wie in (II und III); nun sey aber auch in fig. 177; ABCD ein ganz unrichtiges Viereck; auch die Schärfe CF mit keiner Seite am Kopfe parallel. Man ziehe in den beiden viereckigten Seiten des Keiles, die an dessen Schärfe zusammen gehen, Diagonallinien, nämlich

lich DC in der untern Seite, in der obern CE; so entsteht eine viereckigte Pyramide ABEDC und eine dreieckigte CDFE; die erste hat zur Grundfläche, die Fläche am Kopfe; und ihre Spitze in C; die andere kann zur Grundfläche zwar eine jede dreieckigte Seite haben; allein man nehme DEF zur Grundfläche, so hat auch diese ihre Spitze in C. Beide können berechnet, und ihr gesammter Inhalt gefunden werden.

Die Regel wäre: Man ziehe in beiden Seitenflächen Diagonale nach einem Grenzpunkte der Schärfe des Keiles; so wird dieser Grenzpunkt die gemeinschaftliche Spitze der beiden Pyramiden, deren Grundflächen, und Lage dieser Grundflächen auch so bekannt sind. Ihre Höhe ist nicht einerlei, weil ihre Grundflächen in verschiedenen Ebenen liegen.

V. Werden Prismen, oder abgekürzte Pyramiden schief; d. i. nicht parallel mit den Grundflächen abgeschnitten, so läßt sich allemal durch einen Punkt, welcher an der Grenze des Schnittes in einer Seitenlinie des Körpers ist, und der der Grundfläche am nächsten liegt, eine Ebene parallel mit der Grundfläche legen; wodurch man das schief geschnittene Prisma in zwei Theile, nämlich in ein keilförmiges Stück, und ein richtiges Prisma; die schief abgekürzte Pyramide eben so in ein keilförmiges Stück, und eine richtig abgekürzte Pyramide theilet. Zur Berechnung der richtigen Körper sind in (438) und (444) die nöthigen Weisungen gegeben. Beim keilförmigen Stücke, welches nicht so einfach seyn wird, als fig. 177, wenn nämlich die obigen abgeschnittenen Körper, Grundflächen haben,

die mehr als vierseitig sind. Es stelle daher fig. 178. ein solches keilförmiges Stück vor, welches sich in eine Spitze K endigt; und wo LMK und PRK Dreiecke sind, die übrigen Seiten, wie NM, NQ, QR, u. s. w. sind ebene unrichtige Vierecke, alle aber Flächenstücke von den Seitenflächen der abgeschnittenen Körper. Es wird deutlich, daß durch Diagonalschnitte NOK, PQK u. s. w., die alle nach der Spitze K gehen, das Stück in Pyramiden getheilt werde, welche alle ihre Spitzen in K haben. Zur Grundfläche haben sie die Seitenvierecke. Ihre Berechnung kann daher unternommen werden.

Gieng das keilförmige Stück in eine Schärfe zusammen, wie, wenn RK diese Schärfe wäre; so bleibt noch alles, wie oben, nur wird PQRK eine dreiseitige Pyramide, die zur Grundfläche das Dreieck PQR haben wird.

Anmerk. Die Sache läßt sich nicht wohl mit Exempeln erläutern, auch würden solche Exempel doch nur ganz einzelne Fälle darstellen, die wenig Brauchbares für vorkommende Anwendungen hätten. Ich kann nur Vorsicht in Messung der Höhen der kleinen Pyramiden, welche das keilförmige Stück ausmachen, empfehlen.

§. 464. Aufgabe. Den Inhalt I eines gegrabenen Brunnen; II einer Kellergrube; III eines Wall- oder andern Grabens zu finden.

Auflösung. I. Die Hölung eines gegrabenen Brunnen ist ein cylindrischer Raum, dessen Höhe die Tiefe des Brunnen ist; die Berechnung wird also nach (438, II) geführt. Zur Erhaltung der Fläche des Grundkreises kann man sich der Weisung in (212, II) bedienen.

II.

II. Eine Kellergrube ist gewöhnlich parallelepipedisch, oder doch gewiß prismatisch; ihr untere Grundfläche ist horizontal, und die Seitenwände vertikal auf ihr; allein nicht immer wird die obere Oefnung mit dem Grunde parallel seyn; die Erdoberflächentheile beweisen nämlich zu sehr, daß sie nicht alle horizontal sind. Man muß demnach ein keilförmiges Stück nach (453) annehmen, dessen untere Fläche mit dem Grunde der Grube parallel ist, und nach der dortigen Weisung ausrechnen. Beider Stücke, des richtig prismatischen nämlich, und des keilförmigen, Inhalt zusammen, geben den Inhalt der Grube.

III. Die Seitenwände eines Graben sind gewöhnlich gegen die Grundfläche in der Tiefe geneigt, so daß sie mit diesem Grunde stumpfe Winkel machen. In der 179ten Figur stelle CA, DB die Seitenwände, und AB die Grundfläche vor. Man setze eine Ebene senkrecht auf den Grund des Grabens; die obige Figur kann so eine Ebene vorstellen. Sind nun die Seitenwände durchaus von gleicher Breite, so erhält man hiedurch die Figur eines Prisma, wovon die Ebene ABCD die Grundfläche ist; sind aber die Seitenwände nicht von dieser Gestalt, so nehme man nur die Höhe (eigentlich hier die Länge des Grabens) von der angenommenen Grundfläche ABCD soweit fort, als es die einerlei Breite der Seitenwände erlaubt, und berechne bis dahin ein prismatisches Stück des Grabens. Und so wird man bei andern Breiten der Seitenwände, immer andere Stücke erhalten, die man einzelnen berechnen kann, und so ihren gesammten Inhalt erhält. Auch werden es vielleicht

die Umstände erlauben, ein durchausgehendes Prisma, d. i. ein solches, wo die obere Oefnung CD durchaus mit der untern Grabenfläche einerlei Abstand hat, und wo also die ganze Länge des Grabens für die Höhe eines solchen Prisma gilt, anzunehmen; und, wie oben in (II) noch keilförmige Stücke von der angenommenen Gestalt des Grabens abzuschneiden, und diese auch einzeln zu berechnen; um den ganzen Inhalt zu haben.

§. 465. Aufgabe. Den Körperinhalt der Baumklötze oder Baumstämme zu finden.

Auflösung. Die Baumstämme sind, wie sie vom Wuchse gebildet werden, abgekürzte Kegel; und ihr Inhalt läßt sich nach (445) berechnen. Gewöhnlich wird sich der Umkreis an der obern und untern Grundfläche bequemer, als die Halb- und Durchmesser messen lassen; wenn nämlich eine dünne Kordel, oder ein Riemen in senkrechter Länge auf die Seitenfläche des Stammes um den Baum gelegt wird; aber aus der Länge des Umkreises läßt sich der Habmesser finden (259).

Sollte man aber Schwierigkeiten finden, um die Höhe des abgekürzten Kegels zu messen, welche die Linie Cc fig. 172 vorstellt so messe man die Seite Bb; so ist $Cc = \sqrt{(Bb^2 - EB^2)}$ aber $EB = CB - CE = CB - cb$; weil $cb = CE$ ist, denn CE parall. cb; und Cc, und bE auch; weil beide auf CB senkrecht stehen; daher CcbE ein Parallelogramm ist (114).

Sind die Stämme beschlagen, so sind sie abgekürzte Pyramiden, und man kann die zu ihrer Berechnung erfoderlichen Zahlen leicht haben, wenn

man

man nämlich an beiden Grundflächen zwo ähnlich-liegende Seiten mißt, und so nach (444) verfährt; indem man hier Zahlen statt der dortigen Linien setzen kann. Um die zur Rechnung erfoderliche Höhe der abgekürzten Pyramide zu haben; wie Hh in der 171ten Figur ist, muß man sich mit Anlegung einer parallelen Ebene durch die kleine Grundfläche zu helfen suchen.

Anmerk. Es wird abermal erinnert, daß man bei allen diesen Berechnungen die Linien, die man bei der Berechnung braucht, in einerlei Mastheilen nehme.

§. 466. Aufgabe. I. Den Inhalt einer unförmlichen Grube; II eines kleinen Berges zu finden.

Auflösung. I. Die 180 Figur stelle die Fläche der Oefnung der Grube vor. Man könnte wohl durch parallele Schnitte, dergleichen ak, bi, ch, u. s. w., vorstellen, die Grube in prismatische Stücke, wovon diese Schnitte die Grundflächen sind, abtheilen. Könnte man nun die Fläche eines solchen Schnittes finden; so wäre der Abstand solcher Paar Schnitte, wie mn die Höhe zu dem prismatischen Stücke, und so würde durch einzelne Berechnung derselben endlich auch ihr gesammter Inhalt erhalten.

Die Schnitte müßten freilich so geführt werden, daß sie wenigstens sehr nahe gleich wären, den sonst wäre an keine prismatische Gestalt der Stücke zu denken.

Es könnte vielleicht Fälle geben, wo man die Stücke der Figur der abgekürzten Pyramide nahe brächte; allein es würde zuviele Schwierigkeiten

haben, die Linien zu erhalten, die zur Berechnung solcher Pyramiden erfodert werden.

Man bediene sich daher folgender, obwohl unrichtigen Methode: Man suche den Inhalt zweier zunächstliegender parallelen Schnitte, und nehme die halbe Summe ihrer Inhalte zur Grundfläche, und ihren Abstand zur Höhe, und berechne so ein prismatisches Stück. Es ist wahr, die Methode ist unrichtig, aber sie kann doch weniger Fehler bringen, als die Annahme der prismatischen Gestalt des Stückes, wo solche nicht ist; oder als die angewandte Methode zur Rechnung der abgekürzten Pyramide, wo man hier ein Paar ähnliche Grundflächen, eben so wenig, als ein Paar ähnlichliegende Linien in ihnen haben wird.

An den Grenzen werden die letzt gelegten Schnitte, wie ak und ef noch ganz unregelmäßige Körperstücke abschneiden. Die natürliche Gestalt solcher Stücke läßt vermuthen, daß Querschnitte, wie pq in ihnen angebracht, pyramidenähnliche Stücke in ihnen abtheilen, wovon diese Querschnitte die Grundflächen sind; und alse die Pyramidenrechnung bei ihnen könne angebracht werden; ohne eben große Fehler zu begehen.

II. Es sey die 180te Figur die Grundfläche eines Berges (die Horizontalfläche müßte es freilich seyn, denn ohne diese Voraussetzung würde die nun vorzuschlagende Messung garzuvielen Schwierigkeiten unterworfen werden). Man kann nun hier wieder das ganze Verfahren in (I) anbringen; indem wohl eine Grube, wie ein umgekehrter Berg kann angesehen werden. Um die Flächen der Schnitte zu finden, kann man sich der Methode

in

in (283), und der dabei gebrauchten 110ten Figur bedienen. So ist z. B. $gE = Aa + bc + de$; und $aH = rq + po$.

Anmerk. Die eben gegebene Weisung zur Messung der Gruben und Berge enthält freilich bei weitem noch nicht alle vorkommende Fälle; z. B. wenn die Grube mit Wasser, oder solchem Schlamm angefüllt ist, der das Durchgehen, oder Durchmessen hindert. So kann es bei Bergen seyn, daß Hindernisse das gerade Messen über dieselben kaum verstatten; und was dergleichen noch mehr eintritt. Die obige Weisung soll auch nichts mehr seyn, als nur ein Fingerzeig, wie man vermuthlich die Sache am beßten zu Stande bringen könne. Und wie kann man eine Sache nach Regeln behandeln und beurtheilen, wobei man im Voraus schon anzunehmen gezwungen ist, sie ist wegen ihrer Unregelmäßigkeit schon außer den Dingen, die einer regelmässigen Behandlung fähig sind.

§. 467. Aufgabe. Den Inhalt verschiedener kleinen Körper, deren Gestalt von jener, der geometrischen, sehr abweicht, zu finden. Z. B. Klumpen Gesteine, Erzte, Statuen, u. d. gl.

Auflösung. Man bringe solche Dinge in prismatische Kasten, und überschütte sie mit Sande; man messe den Raum, den so der zu messende Körper mit dem Sande in der Oefnung des Kasten einnimmt; man nehme hernach den Körper heraus; und messe abermal den Raum des Sandes; letztern aber zieht man vom ganzen eingenommenen Raume ab, so giebt der Uiberschuß des erstern vom letztern den Inhalt des zu messenden Körpers.

§. 468. Aufgabe. Den Inhalt I einer Kanone; II einer Glocke zu finden.

Auf-

Auflösung. I. Die Kanone wird, ohne die Ausladungen (die Reife oder Ringe, welche theils wegen der Dauer und Bequemlichkeit, theils wegen Verzierungen angebracht sind), wie ein abgekürzter Kegel berechnet (465). Dann die Mündung, welche ein cylindrischer Raum ist, und dessen Inhalt leicht zu finden seyn wird, vom ganzen Körpergehalt des abgekürzten Kegels abgezogen, läßt den Körperinhalt des Metalles an der Kanone übrig. Die Ringe, oder Ausladungen an der Kanone sind wie kleine Röhrwände zu berechnen.

II. Die Glocke kann, bis an den untern Kranz für einen abgekürzten Kegel betrachtet werden; wo dann die Aushölung wieder einen eigenen abgekürzten Kegel ausmacht; beide werden sich, nach vorherigen Weisungen berechnen lassen; aber letztern vom erstern abgezogen, läßt den Körpergehalt der Glocke, wie weit man sie nämlich für einen abgekürzten Kegel ansehen konnte, übrig.

Der untere Kranz, welcher gewöhnlich anders ausläuft, kann eine Figur bilden, die sich nach diesen Anfangsgründen nicht schätzen läßt. (Wie, wenn sie nach Art der krummen Linie, die man Hyperbel nennt, gebildet wäre).

Man theile daher den Kranz in mehrere Röhrwände, und berechne deren Inhalt.

Die Krone der Glocke besteht aus mehrern gebogenen cylindrischen Stäben, deren Inhalt zu finden, auch nicht schwer ist.

Man könnte sich auch, weil doch gewöhnich vor dem Abguße der Glocke ein Model in Thon ver-

fertigt wird, zu Ausmessung dieses Models der nächst vorigen Aufgabe bedienen.

Anmerk. Daß man oft verlangt zu wissen, wie viel Metall zum Abgießen der Statuen, Kanonen und Glocken erfodert werde, ehe man selbst den Abguß unternimmt, ist sehr begreiflich. Weiß man nun aus einem vorher gemachten Versuche, wie viel der Kubikzoll, oder der Kubikfuß des anzuwendenden Mettalles wiege, so läßt sich leicht aus dem Kubikinhalte des zu fertigenden Körpers, das Gewicht des aufzuwendenden Metalls finden. Dieses gilt auch von Kugeln, wovon (Rechenk. 336, II) Exemp.) ein Beispiel ist.

§. 469. Aufgabe. Einen Maasstab zu verfertigen, vermittelst dessen man cylindrische Gefäße, auch Fäßer visiren könne, um deren Inhalt in Kannen, oder (nach hiesiger Landessprache) in Masen, zu finden.

Auflösung. Man lasse ein cylindrisches Gefäße, etwa von Blech machen, welches aber möglichst genau eine cylindrische Gestalt haben muß. In der 187ten Figur wird ein solches durch ABCD vorgestellt. Man gieße eine richtige Maas Wasser hinein, und bemerke die Höhe, wie weit nämlich die obere Fläche des Wassers vom Boden des Gefäßes reiche; daher es dienlich ist, wenn man das Gefäße vorher richtig horizontal stellet. In der Figur stelle AD die gedachte Höhe vor.

Man verzeichne einen rechten Winkel (es ist zu rathen, daß die itzt folgende Zeichnung auf dem Papiere gemacht werde), dessen einer Schenkel, (in der Figur wird dieser Schenkel durch A8 vorgestellt) wenigstens 3 Fuße lang ist. Man nehme genau den Durchmesser des cylindrischen Gefäßes, und

trage

trage seine Länge in beide Schenkel des rechten Winkels, aus der Winkelspitze angefangen. In der Figur ist AB = A1 der Durchmesser des Gefäßes. Man nehme die länge von B1, welche hier die Hypothenuse ist, und trage sie aus A in den Schenkel A8; sie reiche bis 2, so daß A2 = B1 sey. Nun nehme man die Länge B2; und mache A3 = B2; ferner werde B3 = A4; und so kann man die Theilung im langen Schenkel soweit fortsetzen, als man es für nöthig findet. Ich heiße diese Theile: Bodenmase.

Die so erhaltenen Theile trage man auf einen geraden, etwa vierseitigen Stab in eine auf demselben gezogene geraden Linie. Auf die andere Seite dieses Stabes trage man mehrmal nebeneinander in einer geraden Linie, die Höhe AD (ich heiße diese: Gefäßhöhe); und so ist der Stab zum Gebrauche fertig.

Sein Gebrauch. I. Bei cylindrischen Gefäßen. Man messe mit den Bodenmasen den Durchmesser des cylindrischen Gefäßes, und merke die Zahl, die der Masstab hier angiebt, dann messe man mit der Seite des Stabes, auf welcher die Gefäßhöhen aufgetragen sind, die Höhe des Gefäßes; beide Zahlen in einander multiplicirt, giebt den Inhalt der Kannen, die das Gefäße halten kann.

Der Beweis des Verfahrens erhellet theils aus der Verfertigung des Masstabes, theils aus seiner Anwendung. Die Verzeichnung giebt nämlich folgende Schlüße $B1^2 = AB^2 + A1^2 = A2^2$; ferner $B2^2 = AB^2 + A2^2 = A3^2$ u. s. w. (175). Hieraus folgt, daß ein cylindrisches Gefäße,

fäße, dessen Durchmesser am Boden = A 4 wäre; aber nur die Höhe von AD einmal hätte, vier Kannen enthielt; denn $A4^2 = AB^2 + A3^2 = AB^2 + AB^2 + A2^2 = AB^2 + AB^2 + AB^2 + A1^2 = 4 \times AB^2$ u. s. w. Nun verhält sich aber der Cylinder, dessen Durchmesser A 4 ist, zum Cylinder, dessen Durchmesser AB ist, wie $A4^2 : AB^2 = 4 . AB^2 : AB^2 (400) = 4 : 1$, weil sie einerlei Höhe haben.

Hätte dieses eben betrachtete Gefäße eine Höhe, die die Höhe von AD z. B. sechsmal enthielt, so ist klar, daß sechs solcher Cylinder, wovon jeder 4 Kannen enthält, übereinanderstehen, und man würde ihren Inhalt durch 4×6 Kannen richtig ausdrucken. Auch erhellet die Sache aus (438, II).

II. Wären die Fäßer Cylinder, so ließe sich die Messung in (I) ganz bei ihnen anbringen; allein das sind sie nun gewiß nicht.

Es haben einige geglaubt, man könne das Faß, wie zween abgekürzte Kegel betrachten. Wenn nämlich in der 182ten Figur, CDEF der eine, und CABF der andere wäre, die mit ihren großen Grundflächen in CF zusammenstießen; allein diese Vorstellung ist unrichtig, weil CD, imgleichen FE keine gerade Linien sind. Auch nicht einmal sind CD und FE Zirkelbögen, wie man das an der Gestalt der Fäßer wahrnimmt.

Man hat gefunden, daß, wenn man das Faß für einen Cylinder annahm, dessen Grundfläche die mittlere arithmetische Größe (Rechenk. 345) zwischen der Fläche am Spunden, und der am Boden, seine Höhe aber die Länge mn des Faßes war, und man

so

so die Messung in (I) anbrachte, dieses sehr genau den Inhalt gab, den man durch wirkliche Abeugung des Faßes fand.

Die Länge des Faßes kann man auch durch einen Stab GH, den man über das Spundloch C legt, finden, wenn man beobachtet, daß er zu beiden Böden bei A und D nämlich, gleiche Abstände behält. Man messe nun mit dem Visirstabe, und zwar zuerst mit den Bodenmasen den Durchmesser CF am Spunden, auch den Durchmesser DE am Boden; addire beide Zahlen, und nehme die Hälfte; hernach wird mit der andern Seite des Masstabes, mit den Gefäßhöhen nämlich, die Länge GH gemessen; und die Hälfte der obigen Bodenmaße mit der Zahl der Gefäßhöhen multiplicirt, giebt den Inhalt des Faßes in Kannen, nach welchen nämlich der Masstab eingerichtet ist.

Exempel. DE werde gefunden = 38 Maaße; CF = 42 Maaße; GH = 8 Gefäßlängen; so ist der Inhalt des Faßes $= \frac{38 + 42}{2} \times 8 = 320$ Kannen.

Anmerk. Uiber die Visirung der Fäßer haben die größten Mathematiker Untersuchungen angestellt; der große Keppler beschäftigte sich schon mit diesem Theile der angewandten Mathematik. Nur ein Paar Abhandlungen, die mir merkwürdig schienen, obschon sie nicht von jedem Anfänger können verstanden werden, will ich anführen. **Beer**, auserlesene Abhandlungen, II Theil, Leipzig 1754; ist eine Uibersetzung aus den Memoires présentées à l'Accad. de sciences de Paris, dessen Verfasser **Pezenas** ist, und worinn die Kepplerische Methode

deut=

deutlicher auseinander gesetzt wird. Von Ausmessung der gewöhnlichen Wein- und Tonnengefäße, von **Plantin** in den Schwedischen Abhandlungen, übersetzt von **Kästner** 1774. In eben diesen Abhandlungen **Marelius**; wozu Hr. Hofrath **Kästner** Anmerkungen beigefügt. **Oberreit**, etwas über das Visiren der Fäßer, Leipziger Magazin, 1786, 4tes Stück. Ebenderselbe in gedachtem Magazin 1787. 1tes Stück. Beurtheilung und Berichtigung eines Versuches den Inhalt der Fäßer durch Anwendung der Conchoide (Muschellinie).

Die Krümmung A C D der Faßtauben ist meines Erachtens nicht bei allen Fäßern einerlei. **Lambert** sahe die Krümmung kreisförmig an, und versichert in seinen Beiträgen zur angewandten Mathematik, daß seine Berechnung, aus dieser Voraussetzung, mit der Erfahrung sehr genau zutreffe. **Langsdorf** in seinen Erläuterungen zur Kästnerischen Analysis endlicher Größen pag 422 u. f. giebt eine Rechnung, aus der Voraussetzung, daß die Beugung elliptisch sey, welche mit der Lambertischen gut überein kommt. Daselbst pag 430 hält **Langsdorf** die Beugung für eine Conchoide, und wirklich scheint diese Gestalt die zu seyn, welche der Natur der Faßdauben am nächsten kömmt. Noch andere nahmen die Beugung für einen parabolischen Bogen. Allein so lange keine mathematische Regel im Formen und Beugen der Faßdauben beobachtet wird, solange es wenigstens in Kleinigkeiten der Willkür des Handwerkers überlassen bleibt, die Form und Beugung durch ein Mehr oder ein Minder zu geben, eben so lange werden alle Untersuchungen, eine feste Regel zu finden, fruchtlos seyn.

Würde man aber eine bestimmte Gestalt der Beugung annehmen, so ließe sich freilich der Kubikinhalt eines gegebenen Faßes durch die Regeln der höhern Geometrie und der darauf angewandten höhern Analytik, finden, und so aus dem bekannten Kubikinhalte einer Kanne, den Kanneninhalt des Faßes berechnen.

Diese Methode nun würde auch ein sicheres Mittel darbiethen, Fäßer, die nicht gar voll sind, zu visiren; denn die höhere Analytik lehrt mit eben der Leichtigkeit den Theil des Raumes zu finden, als den ganzen Raum, wenn auch der Theil sonst dem ganzen unähnlich wäre.

Anmerkungen über die Zahlen, welche geometrische Ausdehnungen (Dimensionen) bedeuten.

§. 470. Alle Zahlen sind, für sich betrachtet, unbestimmte Mengen; es kömmt nur darauf an, daß die Einheit in ihnen bestimmt sey, und dann pflegt man sie benannte Zahlen zu nennen, welches eben so viel ist, als bestimmte Zahlen.

Man ist daher berechtigt, jede Zahl, die so bestimmt ist, als ein Produkt aus der unbestimmten Menge in die bestimmte Einheit anzusehen.

Aus der Lehre von Verhältnissen (Rechenk. 93. u. f.) folgt wieder, daß bei Vergleichungen gleichartiger Zahlen man Exponenten erhalte, welche ihrer Natur nach unbenannte Zahlen sind; sie geben nämlich nur an, wie vielmal eine bestimmte Zahl von einer andern auch bestimmten Zahl in der Größe übertroffen werde. Dieser Begriff von unbenannten Zahlen, wie sie nämlich als Exponenten solche sind, ist es aber auch, den man auf jede unbenannte Zahl legen muß. Denn wenn man die Größe eines Dinges durch eine Zahl ausdruckt, so denkt man doch wohl nichts anders zu thun, als durch ein gewisses Merkmal das Ding so zu bezeichnen, daß man immer im Stande sey, die Größe

dieses Dinges mit der Grösse jedes andern, nur mit ihm gleichartigen Dinge, zu vergleichen; denn der menschliche Verstand kennt keine absolute Grösse; alle Begriffe von der Grösse sind an sich schon Vergleichung, daher ist für sich ein Ding weder groß, noch klein zu nennen. Die benannten Zahlen sind daher auch schon als Exponenten anzusehen, denn sie können ja als absolut groß nicht verstanden werden; sie geben an, wie vielmal die Grösse des Dinges, die Grösse des Masstabes, welcher die Einheit ist, übertreffe. So sagt man z. B. eine Zeit von 24 Tagen; wodurch man wohl nichts anders angiebt, als die gedachte Zeit verhält sich zu der von einem Tage, wie 24 zu 1, d. h. wie die unbestimmte Mengen von 24 und 1. Oder die Zeit, derer Grösse man durch die Zahl 24 angiebt, verhält sich zu einer jeden andern Zeit, die auch in Tagen, oder in Theilen des Tages angegeben werden kann, wie die Zahl 24 zu der Zahl, wodurch sich jede andere Zeit eben so durch ein Produkt aus einem Tage in eine unbestimmte Menge ausdrucken läßt. Hieher gehört, was in der dritten Anmerk. zu (120) in der Rechenkunst ist gesagt worden.

§. 471. Grundsätze. I. Wenn man eine Linie mit einer unbenannten Zahl multiplicirt, so kann das Produkt nichts anders, als eine Linie seyn; aber offenbar ist die Linie, die im Produkte verstanden wird, sovielmal grösser, als die, die multiplicirte, wie viele Einheiten die unbenannte Zahl hatte.

II. Eine Fläche mit so einer Zahl multiplicirt, giebt noch eine Fläche, die auch so vielmal grösser,

als die multiplicirte ist, wie viele Einheiten die Zahl hatte.

III. So verhält es sich mit einem, mit einer Zahl multiplicirten Körper.

IV. Werden Linien, Flächen, und Körper, (entweder solche, die, wie in I, II, III schon mit Zahlen multiplicirt sind, oder nicht), mit Zahlen dividirt, so sind die Quotienten wieder Linien, Flächen und Körper; denn man kann die Quotienten nun als Theile des gewesenen Dividenden ansehen (Rechenk. 43).

§. 472. I. Eine Linie, mit einer Linie dividirt, giebt eine unbenannte Zahl, weil hier eigentlich nur der Verhältnißexponent gefunden wird.

II. Die Produkte von zwo Linien verhalten sich, wie Parallelogramme (196); aber auch diese Produkte selbst geben die Inhalte dieser Parallelogramme an (230), wenn die Flächeneinheit (das Quadrat nämlich), gehörig verstanden wird, wie diese Einheit nach den angeführten Sätzen verstanden werden muß. Aber der Verhältnißexponent solcher Produkte ist eine unbenannte Zahl (470); wenn daher ein solches Paar Produkte durch a b; c d vorgestellt werden, wo a, b, c, d Linien sind, so ist $\frac{a\,b}{c\,d}$ eine Zahl.

II. Produkte von drei Linien geben Verhältnisse von prismatischen Körpern (397); und auch selbst geben solche Produkte den Inhalt prismatischer Körper (438), wobei die Maseinheit, der Würfel nämlich, angenommen werden muß. Hieraus er=

erhellet nun wieder, wie in (II), daß der Verhältnißexponent zwischen ein Paar solcher Produkte eine unbenannte Zahl sey; oder $\frac{abe}{cdf}$ giebt eine Zahl, wenn die Buchstaben Linien sind.

III. Außer den drei Ausdehnungen der Dinge (§. 2, VII) giebt es keine mehr; daher können Produkte von vier oder mehr Linien keine Ausdehnung bedeuten. Hiedurch wird nun keinesweges behauptet, daß Produkte, deren Faktoren Linien, und ihrer mehr, als drei sind, undenkbare Zahlen sind.

§. 473. Produkte, deren Faktoren Linien sind, heißen: Dimensionen (Ausmessungen; Ausdehnungen); ist nur ein Faktor eine Linie, wie (171, I), so heißt das Produkt von der ersten Dimension; kommen zwo Linien im Produkte als Faktoren vor, so ist das Produkt von der zweiten; und bei drei Linien als Faktoren, von der dritten Dimension.

§. 474. Wenn mit einer Linie in eine Fläche dividirt wird, so muß der Quotient eine Linie seyn; weil die Division mit einem Faktor, ins Produkt, den andern Faktor giebt; aus eben dem Grunde muß eine Linie als Quotient herauskommen, wenn mit einer Fläche in ein körperliches Produkt dividirt wird. Und so wird überhaupt begreiflich, wie Dimensionen durch die Multiplikation höher, und durch Division niedriger werden. Es bedeute L eine Linie, F eine Fläche, und Z eine Zahl; die folgenden kleinen Buchstaben sollen Linien bedeuten,

so ist $\frac{ab}{c} = L$; auch $\frac{abd}{gh} = L$; aber $\frac{abd}{g} = F$;

auch $\frac{a}{Z} = L$ und $\frac{ab}{Z} = F$; eben so $\frac{abd}{Z} = K$;

wo K einen Körper bedeute. Ferner ist $\frac{a}{b} = Z$;

auch $\frac{ab}{cd} = Z$; und $\frac{abd}{ghi} = Z$.

Anmerk. Es könnte die Frage entstehen, was man sich bei $\frac{a}{bc}$, oder $\frac{ab}{cde}$ denken solle; oder ob diese Bezeichnungen für sich, Begriffe von Größen ausdrucken können? Es fällt sogleich in die Augen, daß sie weder eine Zahl, weder Linie, weder Fläche seyn können; daher solche Bezeichnungen eine eigene Bedeutung haben müßen, die sich mit den obigen Begriffen nicht vergleichen läßt.

Wenn eine Linie von der ersten Dimension heißt; so ist wohl die Dimension von einer Zahl $= 0$; gäbe es Begriffe für negative Dimensionen, so würde $\frac{ab}{cde}$ ein Ausdruck für negative Dimensionen seyn.

Mir sind keine, von andern gemachte Untersuchungen über diese Art Ausdrücke bekannt; aber ich muß gestehen, daß ich solche Ausdrücke im absoluten Sinne angenommen, für unerklärbar halte; vermuthlich sind sie absolut genommen, Undinge.

Aber

Aber im Verhältnisse können sie wohl gebraucht werden. So ist z. B. $\frac{a}{cd} : \frac{b}{ef} = aef : bcd$; und da ließe sich die Sache verstehen.

Man weiß, daß $\sqrt{-a}$; oder $\sqrt{a}.\sqrt{-1}$ unter die unmöglichen Größen gehöre; aber $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} : \sqrt{b}.\sqrt{-1} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$; das heißt doch wohl auch: Ausdrücke, die für sich unmögliche Dinge bezeichnen, geben doch mögliche Verhältnisse.

Hiemit soll nun gar nicht behauptet werden, daß $\frac{a}{bc}$ eine Bezeichnung eines unmöglichen Dinges sey; aber so viel folgt doch aus dem eben angeführten Beispiele, daß Ausdrücke, die sich in ein bestimmtes Verhältniß bringen lassen, nicht eben allemal für sich verständlich seyn müßen.

§. 475. Eigentlich sind zwar Produkte aus Linien für sich unbegreifliche Dinge; weil man sich dabei nichts denken kann; Produkte können nur aus Zahlen gemacht werden, so wie auch nur Potenzen von Zahlen herkommen können; dieses ist aus (472) und (292 Anmerk.) begreiflich; daher wurde im Beweise zu (227) ausdrücklich dargethan, daß $N^2 . Q$ eigentlich die Quadratfläche bringe, wo N eine Zahl bedeutet; eben so ist der erwiesene Ausdruck $k^3 . x$ in (433) zu verstehen.

Wenn man daher (die kleinen Buchstaben in der obigen Bedeutung genommen) a^3; b^2 u. d. gl. setzt, wie solche in §. 201; §. 234; §. 398; §. 403 vor-

vorkommen; so bedeuten solche vervielfachte Verhältnisse (rationes multiplicatae) der gedachten Linien; so ist z. B. $L^3 : l^3 = 3(L : l) = (L : l) + (L : l) + (L : l)$ (Rechenk. 370). In diesem Sinne sind die Ausdrücke L^3, l^3; auch a^2, b^2 zweckmäßig.

§. 476. Aus der Rechenkunst, und aus der Natur der Sachen ist begreiflich, daß man nur gleichartige Dinge zu einander addiren, und von einander abziehen könne.

Daher sind $\frac{a}{b} + \frac{cd}{ef} - Z . \frac{afe}{klm}$ in ihrer Verbindung richtig; folgende aber sind in der angenommenen Verbindung falsch $\frac{ab}{e} - \frac{cdf}{g} + \frac{hik}{Z} + \frac{a^3 . b^2}{c}$.

§. 477. Anmerk. Das eben Gesagte giebt eine Regel, die man nie außer Acht setzen darf, wenn man in algebraischen Gleichungen, worinn die Theile der Gleichungen aus Produkten, oder Quotienten bestehen, deren Faktoren Linien sind, Rechnungen entwickelt.

Kömmt man in solchen Rechnungen auf dergleichen falschen Verbindungen, so ist offenbar die Rechnung falsch; aber der Grund dieser falschen Rechnung ist nicht immer, wiewohl sehr oft, ein begangener Rechnungsfehler; manchmal auch liegt der Grund der Ungereimtheit in unrichtigen Voraussetzungen, die man als Grundlage zur Rechnung annahm. Aber gewiß ist es, daß allemal eine dieser Versehungen, bei solchen ungereimten Rechnungsresultaten zum Grunde liege. Es ist demnach Anfängern, die sich in das höhere Gebieth der Mathematik wagen wollen, nicht genug zu empfehlen, diese Regel beständig vor Augen zu haben.

Die

Die ebene Trigonometrie.

§. 1. In jedem geradlinigten Dreiecke giebt es sechs Stücke, nämlich drei Seiten, und drei Winkel, die zusammen die Größe und Gestalt des Dreiecks ausmachen.

§. 2. Sind zween Winkel der Größe nach im Dreiecke bekannt, so ist der Dritte bestimmt; d. h., der dritte Winkel kann nun nicht mehr willkürlich angenommen werden (106, I).

§. 3. Sind drei Stücke im Dreiecke bekannt, worunter wenigstens eine Seite ist, so ist das Dreieck bestimmt, und es steht nicht in unserer Willkür, die andern drei Stücke so groß zu machen, als man will; denn

I. Eine Seite, und zween Winkel bestimmen ein einziges Dreieck (61), und aus (Trig. 2) ist klar, daß (61) die Allgemeinheit dieser Behauptung beweise.

II. Zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen auch nur ein einziges Dreieck (58); daß aber zwo Seiten und ein Winkel, der nicht der eingeschlossene ist, zwei Dreiecke, aber auch nur zwei, angeben; folglich die Bestimmung eines einzigen nicht festsetzen, kann so erwiesen werden. Es seyen in der 183ten Figur, AC und CB nebst dem Winkel A die gegebenen Stücke. Mit der kleinsten Seite CB beschreibe man aus dem Endpunkte C der Linie AC, (an welchem nämlich der gegebene Winkel nicht liegt) einen Kreis; dieser

 schnei-

schneidet den Schenkel AD des Winkels A zweimal; nämlich in B und D; aber auch nur zweimal (83), und es ist CB = CD (29); daher ist nun das △ ACB sowohl, als das △ ACD das, worinn die angegebenen Dinge sind. Da aber AD und AC wegen dem bestimmten Winkel auch eine bestimmte Lage haben, und in dieser Lage die AD nur zweimal geschnitten wird, so giebt es nur die genannten zwei △△.

III. Weil das △ BCD gleichschenklicht ist, so ist ∢ CBD spitz (77); folglich ∢ CBA stumpf (43, III). Wäre ∢ CBA ein rechter; so erfolgte kein zweiter Schnitt in D, weil AB nun zur Tangente wird (156, III). Hieraus folgt nun, daß aus zwo Seiten eines Dreieckes und einem Winkel, der nicht der eingeschlossene ist, das Dreieck seine völlige Bestimmtheit habe, wenn man nur noch die Art der beiden andern Winkel weiß; ist nämlich einer von den andern zweien ein rechter, so giebt es nur ein einziges Dreieck; eben so, wenn man weiß, ob einer davon stumpf ist, oder wenn man weiß, daß die andern beiden spitz sind. Wäre aber selbst der gegebene Winkel BAC ein stumpfer, oder ein rechter, so sind die andern beiden, in ihrer Art, bestimmt, und die Zweideutigkeit hat in diesem Falle schon nicht mehr statt.

IV. Sind die drei Seiten eines Dreieckes gegeben, so ist das Dreieck auch so bestimmt, daß die Winkel in ihm nicht mehr willkürlich seyn können (§. 66).

V. Sind die drei Winkel eines Dreieckes bekannt, so ist die bestimmte Länge der Seiten hiedurch keineswegs anzugeben; indem man unzählig

lig viele Dreiecke haben kann, die bei den verschiedensten Längen ihrer Seiten die angegebenen Winkel haben können, wie dieses (205) und die folgenden Sätzen beweisen. Aus den drei bekannten Winkeln eines Dreieckes hat man nur das Verhältniß ihrer Seiten, wie dieses die eben angeführten Sätze beweisen.

§. 4. Erklärung. Die ebene Trigonometrie ist die Wissenschaft, aus drei gegebenen Dingen, die ein Drejeck bestimmen, die übrigen drei durch Rechnung zu finden.

§. 5. Zusatz. Es ist daher begreiflich, daß die gegebenen Dinge durch Zahlen müßen ausgedruckt seyn; denn nur in Zahlen, oder solchen Dingen, die sich wie Zahlen verhalten, kann gerechnet werden.

§. 6. Zusatz. Weil die Rechnungen durch Verhältnisse, oder Proportionen geführt werden; aber Winkel und Linien Dinge sind, die wegen ihrer Ungleichartigkeit sich nicht vergleichen lassen, so hat man statt der Winkel gerade Linien ausfindig gemacht, die sich wie die Winkel verhalten, und die statt der Winkel in den Rechnungen gebraucht werden. Man heißt solche Linien Funktionen der Winkel; weil sie sich wie die Winkel verhalten; oder weil sie sich wie die Bögen, die die Mase der Winkel sind, verhalten.

Anmerk. Die Funktionslinien oder Winkel kommen unter folgenden Benennungen vor: Sinus, Quersinus, Tangente, Sekante, Cosinus, Coquersinus, Cotangente, Cosekante. Ihre abgekürzte Bezeichnung geschieht: Sin.; Quersin.; tang; sec; cos; coquers; cot; cosec. Von ihren

Na-

Natur und Entstehung muß man daher wenigstens vorrerst das Allgemeinste wissen, ehe man trigonometrische Rechnungen mit Verstande unternehmen könne.

§. 7. Lehrsatz. Die Bögen AB und BF in der 184ten Figur sollen zusammen einen Halbkreis ausmachen; und wenn man die Halbmesser CA, CB, CF zieht, (wo jedoch ACF der gerade Durchmesser wird (44)), so ist eine senkrechte Linie von einem Endpunkte des Bogens auf den Durchmesser möglich, welche den Durchmesser auf der Seite des Mittelpunktes trift, wo der kleine Bogen liegt; der nämlich kleiner, als 90° ist.

Beweis. Wenn AF unbegrenzt angenommen wird, so ist aus B allemal eine senkrechte Linie BD auf diese AF möglich (73). Der Punkt D, wo die senkrechte Linie die AF trift, wird entweder linker Hand des Punktes C, wo nämlich der kleinere Bogen AB liegt, oder rechter Hand, von C, wo der größere Bogen BF liegt, fallen. Weil aber die Winkel BCA und BCF Nebenwinkel sind (43), und BCF stumpf (43, III), so würde, wenn die senkrechte Bd auf CF fiele, ein Dreieck entstehen (52), worinn ein rechter und ein stumpfer Winkel wäre, welches unmöglich ist (108); daher fällt BD linker Hand. Aber hier kann BD vier Lagen haben; entweder sie fällt außerhalb des Kreises auf den verlängten Durchmesser, d.i. linker Hand von A, oder in A, oder zwischen A und C, oder in C. Wäre der erste Fall, so wäre die Hypothenuse CB kleiner, als der Kathet; weil die verlängte CA zum Katheten würde; wider (81); wäre der zweite Fall, so wäre ABC ein gleichschenk-

schenklichtes Dreieck, wegen AC = BC (§. 29), worinn ein rechter Winkel an der Grundseite wäre, welches wegen (77) nicht seyn kann. Der letzte Fall ist auch unmöglich, weil hier die senkrechte Linie, und BC zusammen fallen würden, und doch soll der Winkel BCA spitz seyn; folglich fällt BD zwischen A und C, das heißt, sie trift den Durchmesser auf der Seite, wo der kleinere Bogen liegt.

§. 8. Erklärung. I. Die senkrechte Linie AD in der 185ten Figur, die von dem Endpunkte des Bogens AB, oder des Bogens AF, auf den andern diesen Bogen begrenzenden Halbmesser fällt, heißt des Bogens Sinus.

II. Man nenne einen gewissen Punkt im Kreise den ersten; z. B. B sey der erste; und lege durch ihn den Durchmesser BF, so kann man BGF den ersten, und FHB den zweiten Halbkreis nennen; der erste fängt in B, der zweite in F an. Wird ein anderer Durchmesser GH senkrecht auf den ersten gesetzt, so entstehen vier Quadranten (131); man muß nun auch BG den ersten, GF den zweiten, FH den dritten, und HB den vierten nennen. Ihr Anfangs- und Endpunkte sind nun auch bestimmt; weil diese Punkte an den beiden Halbkreisen bestimmt sind.

§. 9. Zusatz. I. Wird AD verlängt, bis sie auf der andern Seite des Halbmessers CB, den Kreis in E trift; und sie trift ihn gewiß (33); so ist AD = DE; auch ist der Bogen AB = Bogen BE (128, I); daher ist der Sinus eines Bogens die halbe Senne des doppelten Bogens.

II.

II. DE ist in der nämlichen Bedeutung der Sinus des Bogens BE; aber in entgegengesetzter Lage; oder AD = DE; nur ist der eine Sinus in Rücksicht des andern negativ. Man kann es so andeuten AD = — DE.

§. 10. Zusatz. Die Senne AE gehört sowohl zu dem Bogen ABE, als auch zum Bogen AFE; aber der Bogen AF = Bogen FE (128); daher haben zween Bögen, die zusammen einen Halbkreis, oder 180° ausmachen, vollkommen einerlei Sinus. Jeder solcher Bögen heißt das Supplement (Ausfüllung) des andern Bogens zu 180°.

§. 11. Zusatz. CG sey ein senkrechter Halbmesser auf BF, so ist der Bogen BG = GF = 90° (131). Es sey der Bogen BAe = Bogen Aef, wo der letzte 180° — AB, und der erste = 180° — eF ist; folglich AB = eF, und beide von BG = GF abgezogen, giebt den Bogen AG = GE; d. i., der Bogen AB ist so viel unter 90°, als BAe darüber ist; beide Bögen haben aber einerlei Sinus (Trig. 10), und diese letzte Erklärung der beiden Bögen kömmt auch mit (10) überein. Aber weil auch der Bogen AB = eF, so ist AD = ed; daher sagt man auch Bögen, die um gleichviel von 90° unterschieden sind, haben gleiche Sinus.

§. 12. Zusatz. I. Der Bogen BA werde größer, so, daß A näher an G, d. i. näher an die Grenze des ersten Quadranten komme, es giebt aber immer von A eine senkrechte Linie auf CB (Trig. 7), welche auch unter CB verlängt, zur Senne wird; diese Senne, und folglich ihre Hälfte, oder des wachsenden Bogens Sinus wird so größer (178, III). Auch liegt immer des größern

Bo-

Bogens größerer Sinus näher am senkrechten Halbmesser CG; aber weil CG die größte halbe Senne ist (179), so geht das Wachsen der Sinus nur mit dem wachsenden Bogen fort, bis der Sinus zum Halbmesser wird; welcher also der größte ist. Aber hier wird auch deutlich, daß alsdann der Bogen = 90° sey. Nun kann das Wachsen des Bogens immer weiter gehen; und folglich A zwischen G und F fallen; in welchem Zustande die Sinus rechter Hand von CG, auf CF fallen; aber aus (178) wird hier wieder klar, daß die Sinus von Bögen, die über 90° sind, kleiner, als der Halbmesser werden, und daß bei solchen wachsenden Bögen die Sinus abnehmen; dieses geht soweit, bis A in F komme, wo also der Sinus = 0 wird, oder der Sinus eines Bogens von 180° ist = 0. Eben das ist aber auch der Sinus von einem Bogen, der 0 Grade hat; oder (nach der obigen Art die Sache betrachtet). Wenn A in B liegt, so ist der Bogen und Sinus = 0.

II. Wird der Bogen größer, als 180°, oder, wenn A unter F, d. i. in den zweiten Halbkreis komme; so kommen die Sinus zwar wieder zum Vorscheine, aber sie haben eine entgegengesetzte Lage von denen, die im ersten Halbkreise entstanden; sie sind daher negativ. Und weil bei beständigem Größerwerden des Bogens sich nun A (welches ich itzt a nennen will), dem Halbmesser CH wieder nähert, so wachsen die Sinus in dem Quadranten FH mit den Bögen; wenn aber a wieder in den Quadranten HB kömmt, und immer durch Fortrücken den Bogen größer macht, so nehmen die Sinus wieder ab, bis a in B kömmt, wo wieder der

Si-

Sinus = 0 wird. Die Betrachtungen führen auf folgende Schlüße:

III. Wenn im ersten Halbkreise die Sinus positiv genommen werden, so sind die Sinus im andern Halbkreise negativ (Rechenk. 141).

IV. Im ersten und dritten Quadranten wachsen die Sinus mit den wachsenden Bögen; im zweiten und vierten Quadranten nehmen die Sinus bei den wachsenden Bögen ab.

V. Ein Bogen von 90° hat den größten positiven; und ein Bogen von 270° den größten negativen Sinus; beide nämlich den Halbmesser.

VI. Die Sinus sind = 0, wenn der Bogen = 0 Grade, oder = 180°; oder = 360° ist; und wenn die Bögen über die eben gedachten Grenze wachsen, so gehen immer die Sinus in die entgegengesetzte Lage über.

§. 13. Zusatz. Wenn AC in a verlängt wird, und aus a die senkrechte ad auf CF fällt, so ist ∢ FCa = ∢ ACB (47), und △ Cda ≅ △ CDA (58); folglich ad = AD; und so der Bogen Fa = BA (127); folglich haben Bögen, die über 180° sind gleiche, nur entgegengesetzte Sinus mit Bögen unter 180° Graden, wenn letztere so groß sind, als der Uiberschuß ist, um welchen erstere größer, als 180° sind.

§. 14. Zusatz. Würde man, wie oben in (12) das Wachsen des Bogens auch noch über 360° annehmen, wie wenn a über B bis etwa wieder in A rückte, so ist klar, daß nun, wie a in den ersten Quadranten kömmt (der hier der fünfte heißen mag), wieder positive Sinus zum Vorscheine kommen;

men, und es verhält sich mit dem Wachsen und Abnehmen, auch mit den entgegengesetzten Lagen der Sinus in den folgenden Quadranten, wie es sich bei der ersten Umbewegung verhielt; folglich haben Bögen auch einerlei Sinus, deren Unterschied 360° beträgt; auch deren Unterschied ein vielfaches von 360° ist; weil sich die Umbewegung des Punktes A mehrmal annehmen läßt.

§. 15. Zusatz. Aus dem bisherigen folgt nun, daß die Sinus im ersten Halbkreise, gemäß ihrer Beziehung auf den Bogen zweideutig sind; denn wenn ein Bogen eben soviel unter 90°, als ein anderer darüber ist, so haben beide völlig einerlei Sinus; dieses ist eben so im zweiten Halbkreise, wo man sagt, daß wenn ein Bogen soviel unter 270°, als ein anderer darüber ist, so haben sie auch völlig einerlei Sinus. Kömmt zu einem der eben gedachten Bögen der Umkreis, oder 360° noch ein- oder einigemale, so hat man wieder die nämlichen Sinus; in dieser letzten Rücksicht wird die Sache vieldeutig, und daher ganz unbestimmt. In diesen Anfangsgründen pflegt man den letzten Umstand nicht zu betrachten. Im ersten Falle wird der Bogen, dessen Sinus man etwa angiebt, nur dann völlig bestimmt, wenn man weiß, ob er unter, oder über 90° ist. Und weil die Winkel durch solche Bögen gemessen werden, so gilt das auch von Winkeln.

§. 16. Zusatz. Da der Halbmesser der größte Sinus ist (Trig. 12, V), so heißt er auch Sinus totus, weil die andern Sinus alle, als Theile von ihm, können angesehen werden. Der Sinus eines rechten Winkels, oder eines Bogens von 90°; der Sinus totus; der Halbmesser, sind gleichbedeutende Ausdrücke in diesem Vortrage.

§. 17. Erklärung. Zween Winkel, die zusammen 90° ausmachen, dergleichen BCA und GCA sind, heißen sich wechselsweise Ergänzungswinkel zu 90° (Komplementswinkel). So ist GCA der Komplementswinkel von BCA, und letzterer vom erstern. Dieses wird so von zween Bögen verstanden, die züsammen einen Quadranten ausmachen. Der zweite Winkel heißt jedoch gewöhnlich die Ergänzung; man muß daher erster und zweiter Winkel, oder erster und zweiter Bogen in dem Sinne wie (Trig. 8, II), nehmen.

§. 18. Zusatz. Der Sinus AK des Komplementswinkels ACG heißt der Cosinus des Winkels ACB. Und weil AD parallel KC; eben so DC parallel AK (100), so ist DC = AK. Ist also der Sinus AD eines Winkels, der unter 90° ist, nebst dem Halbmesser bekannt; mit dem die Bögen, als Mase dieser Winkel beschrieben sind, so findet man leicht den Cosinus des Winkels; es ist nämlich cos, oder $CD = AK = \surd(AC^2 - AD)$ (§. 176).

§. 19. BD heißt der Quersinus des Bogens AB; oder des Winkels ACB; er ist der Unterschied des Halbmessers und Cosinus. Auch ist KG $= CG - CK = CG - AD$; oder der Coquersinus ist der Unterschied zwischen Halbmesser und Sinus.

§. 20. Zus. Sowohl aus den Betrachtungen (Trig. (12, 13), als vorzüglich daraus, weil immer $CA^2 - AD^2 = CD^2$ (175); und folglich cos $= \surd(\sin tot^2 - \sin^2)$ wird es deutlich, daß der Cosinus abnimmt, wenn der Sinus wächst; wird der Sinus = sin. tot., so ist der cos = 0; wächst

der

der Bögen, oder Winkel über 90°; so fällt zwar der Sinus sowohl, als der Cosinus in den zweiten Quadranten; allein der Cosinus bekömmt offenbar eine Lage, die der, im ersten Quadranten gerade entgegen gesetzt ist; daher wird er im zweiten Quadranten negativ. Dieses Negativwerden des Cosinus widerspricht zwar der obigen Formel $\sqrt{(\sin tot^2 - \sin^2)}$ nicht, weil eine jede Quadratwurzel positiv, oder negativ seyn kann (Rechenk. 149); und eigentlich die Formel so heißen müßte $\cos = \pm \sqrt{(\sin tot^2 - \sin^2)}$; aber die Betrachtung der Lage des Cosinus muß seinen positiven oder negativen Sinn angeben. Und diese Lage wird bestimmt, wenn man weiß, ob der Bogen über, oder unter 90° ist, zu welchem der Cosinus gehört.

§. 21. Zus. I. Eines negativen Sinus Quadrat ist positiv, daher bleibt auch bei einem negativen Sinus die obige Rechnungsformel die nämliche. Aber die Lage des Cosinus für Bögen oder Winkel im zweiten und dritten Quadranten ist nicht nur die nämliche (denn sie werden sich alle auf dem Halbmesser CF nehmen lassen), sondern der Cosinus für gleiche Bögen in diesen zwei Quadranten ist auch selbst der nämliche.

II. Hieraus folgt, daß die Cosinus im zweiten und dritten Quadranten negativ; im ersten und vierten aber positiv sind.

III. Um die Sache desto deutlicher einzusehen, kann man das in (Trig. 11, und 13) so verstehen: Bögen von 0 Graden bis zu m Graden im ersten Quadranten; und Bögen von 180° rückwärts in dem zweiten Quadranten bis zu m Graden; ferner von 180° vorwärts in den dritten Qua-

dranten, bis zum Graden; dann von 360° rückwärts in den vierten Quadranten bis auch zu m Graden, solche Bögen haben für sich einerlei Sinus und Cosinus; aber ihre Lage ist nicht einerlei; diese Lage muß daher allemal bei der Größe des Sinus und Cosinus gemerkt werden.

IV. Wenn der Punkt A zu Anfange in B war, wo Bogen und Winkel = 0 sind, so ist Cosinus = + sin. tot. Bei einem Bogen von 180°, wo wieder der Sinus = 0 wird, ist der Cosinus = — sin. tot.

§. 22. Zusatz. Würde der Punkt A, der zu Anfange in B angenommen werde, statt sich nach G und F (wie bisher immer angenommen wurde), zu bewegen, sich nach der entgegengesetzten Richtung, d.i., nach E, H bis F bewegen, so ist klar, daß man die Bögen im entgegengesetzten Halbkreise für negativ ansehen könne; auch dieses gilt für die Lage solcher Winkel. Der Durchmesser theilt daher den ganzen Kreis in eine positive und in eine negative Hälfte. Diese Voraussetzung ändert die bisherigen Begriffe von der Lage der Sinus und Cosinus zwar nicht, sie stellt die Sache nur so dar: I. Im positiven Halbkreise sind die Sinus positiv, im negativen aber negativ. II. Im ersten positiven und im ersten negativen Quadranten sind die Cosinus positiv, in den beiden andern negativ.

§. 23. Zusatz. Aus allen bisherigen Betrachtungen folgt allgemein: daß sowohl die Sinus als Cosinus aus der einen in die entgegengesetzte Lage kommen, nachdem sie bei beständiger Abnahme durch 0 gegangen sind. Dieses stimmt genau mit

den

den Begriffen vom Positiven und Negativen überein (Rechenk. 142).

§. 24. Erklärung. Die Linie BS am Anfange des Bogens auf dem Halbmesser senkrecht, und verlängt, bis sie mit dem, auch verlängten, Halbmesser CB in S zusammenstoße, heißt des Bogens BA Tangente; CS aber des Bogens Sekante.

§. 25. Zusatz. I. Wird BS nach der andern Seite verlängt, bis sie dort mit CV zusammentrift, so ist BV = BS; denn △ BSC ≅ △ BVC (61); weil in beiden Dreiecken BC = BC; bei B zween rechte, bei C aber auch gleiche Winkel sind.

II. Aber BV ist, weil sie eine entgegengesetzte Lage mit BS hat, eine negative Tangente; und gehört auch zum negativen Bogen BE (Trig. 22).

§. 26. Um deutlicher zu zeigen, wie das Wachsen und Abnehmen der Tangenten und Sekanten, auch ihre Lage anzunehmen sey, setze ich folgende Proportionen: Weil BS parallel AD ist (100); so ist CD : CB = DA : BS (205); oder cos : sin tot = sin : tang. Daher $\frac{\text{sin tot} \times \text{sin}}{\text{cos}} = \text{tang}$ (⊙)

Ferner CD : CB = CA : CS; oder cos : sin tot = sin tot : sec; folglich $\text{sec} = \frac{\text{sin tot}^2}{\text{cos}}$ (☾)

Wenn aber der Bogen wächst, so wächst sein Sinus und der Cosinus nimmt ab (Trig. 20); folglich muß in (⊙) die Tangente wachsen, wenn der Sinus wächst; und zwar wächst die Tangente sowohl in Ansehung des dortigen Zählers, als des Nen-

Nenners; woraus begreiflich wird, daß die Tangente schneller, als der Sinus wachse. Alles dieses zeigt aber auch die Betrachtung der Figur.

II. Aus (C) wird eben so richtig hergeleitet, daß bei abnehmenden Cosinus (d. h. bei zunehmendem Sinus), die Sekante wachse. Da aber hier nur der Nenner abnimmt; und der Zähler beständig bleibt, so ist zugleich klar, daß die Sekante beim wachsenden Sinus, oder beim wachsenden Bogen nicht so schnell wachse, als die Tangente.

Die Behauptung in (II) kann man auch noch auf eine andere Art beweisen. Es sey ACB fig. 186. ein Winkel, dessen Tangente $AB = a$; Sekante $AC = b$; und Sinus totus $BC = r$ sey; alle drei Funktionslinien sind gegeben. Man halbire den Winkel C durch DC; so ist BD die Tangente für den halben Winkel; und DC dessen Sekante.

Es sey $AD = x$; $DC = y$; und $BD = a - x$. Das Wachsthum der Tangente für den doppelten Winkel ist x; und $b - y$ das Wachsthum von dessen Sekante.

Nun ist $r : b = a - x : x$ (Geom. 207) und $rx = ab - bx$ (Rechenk. 110); oder $rx + bx = ab = x.(r+b)$; daher $x = \frac{ab}{r+b}$; aber $y^2 = r^2 + (a-x)^2$ (175); oder $y^2 = r^2 + \left(a - \frac{ab}{r+b}\right)^2 = r^2 + \frac{(ar+ab-ab)^2}{(r+b)^2} = r^2 + \frac{a^2 r^2}{(r+b)^2} = r^2 +$

a^2

$$\frac{a^2 r^2}{r^2+2rb+b^2} = \frac{r^2.(r^2+2rb+b^2+a^2)}{r^2+2rb+b^2};$$ folglich $y = r.\frac{\sqrt{(r^2+2rb+b^2+a^2)}}{r+b}$; und weil $r^2+a^2=b^2$; so ist $\sqrt{(r^2+2rb+b^2+a^2)} = \sqrt{(2b^2+2rb)}$.

Nun verhält sich das Wachsthum der Tangente zum Wachsthume der Sekante, beide für den doppelten Winkel $= x : b - \frac{r}{r+b}.\sqrt{(2b^2+2rb)}$ $= \frac{ab}{r+b} : \frac{b.(r+b) - r.\sqrt{(2b^2+2rb)}}{r+b} =$ $ab : b.(r+b - r.\sqrt{(2b^2+2rb)}) = a$ $: r+b - \frac{r}{b}.\sqrt{(2b^2+2rb)}$.

Ich nehme $b=5$; $r=4$; so ist $a=3$ (176); daher das obige Verhältniß in Zahlen $= 3 : 9 - \frac{4}{5}.\sqrt{90} = 3 : 9 - 7,58.. = 3 : 1,42..$ wo das letzte Glied ohne dies noch etwas zu groß ist. Läßt man oben $b=5$, setzt aber $r=3$, so ist $a=4$; und das Verhältniß $= 4 : 8 - \frac{3}{5}.\sqrt{80} = 4 : 8 - 5,36.. = 4 : 2,64$; wo wieder das letzte Glied etwas zu groß ist. Setzte man $r=a=1$; so ist $b=\sqrt{2}=1,414...$ und das Verhältniß $= 1 : 2,414 - 1,859... = 1 : 0,555$. Aber diese Exempel gelten für alle Fälle.

III. Wird der Cosinus = 0; so wird tang =

$$\frac{\sin tot \times \sin d}{0} = \infty \text{ auch } \sec = \frac{(\sin\ tot)^2}{0} = \infty$$

der Begriff ist: Ein Bruch wird immer größer, wenn sein Nenner abnimmt; und er wird unendlich groß, wenn der Nenner unendlich klein wird; aber 0 kann angesehen werden, als eine unendlich kleine Zahl.

Dieser Zustand der Tangente und Sekante erfolgt, wenn der Winkel = 90° wird. Aus der Figur erhellet aber eben das; denn wenn A in G kömmt, so ist CG und BS parallel, und ihr Schnitt erfolgt eigentlich gar nicht; denn, was in einer unendlichen Entfernung geschehen soll, geschieht niemal.

IV. Wenn A über G, etwa in e kömmt, so wird nun die Tangente aus B den rückwärts verlängten Halbmesser Ce in V treffen, oder BV wird die Tangente vom Bogen BAe; sie ist der Lage nach schon der SB entgegengesetzt; aber hier wird auch die Formel (⊙) negativ, weil der Cosinus negativ ist (Trig. 20). In diesem Falle wird die Sekante CV, und ist dem Halbmesser Ce, auf dem sie eigentlich müßte genommen werden, entgegengesetzt; folglich auch negativ, wie dieses zugleich die Formel (☾) lehrt.

V. Aus (IV) folgt aber, daß bei dem wachsenden Bogen, im zweiten Quadranten, oder bei einem wachsenden Bogen, der schon über 90° ist, sowohl Tangente, als Sekante abnehmen, weil so der Nenner zunimmt.

VI.

VI. Kömmt A in F, so wird V in B rücken; folglich wird die Tangente $=0$, und die Sekante $=$ sin tot. Dieses wird aus der Figur und aus den Formeln deutlich.

VII. Wächst der Bogen bis in den dritten Quadranten, etwa wenn A in a käme, so würde, zwar die Sekante auf dem Halbmesser Ca müßen genommen werden; allein dieser Halbmesser rückwärts verlängt, trift die Tangente BS wieder in S; daher bekömmt die Tangente wieder die Lage, in der sie positiv war; allein die Sekante wird ihrer Lage nach negativ, weil CS für sie, statt der verlängten Ca muß genommen werden. Auch wird in der Formel für die Tangente bei diesem Bogen sowohl der Sinus als Cosinus negativ, daher der Quotient positiv (Rechenk. 150); aber die Formel für die Sekante enthält nur den negativen Nenner, daher giebt sie die Sekante negativ.

VIII. Wächst der Bogen bis zum vierten Quadranten, so wird sowohl aus der Betrachtung der Lage, als auch wegen den Formeln, die Tangente negativ, die Sekante positiv.

VIIII. Weil aber auch die Bögen für sich in den verschiedenen Quadranten können betrachtet werden, ohne daß sie, wie bisher geschah, nur durch Wachsthum von 0, oder von B bis dahin kämen, wie dieses für die Sinus (Trig. 11) erklärt ist; so folgt, das gleiche Bögen (wenn man, wie bei den Sinus ihren Anfang entweder von 0 an, oder von 180° rückwärts in den zweiten Quadranten, oder von 180° in den dritten Quadranten, oder von 360° rückwärts in den vierten Qua-

dranten nimmt), gleiche Tangenten und Sekanten haben. Nur ihre Lage ist nicht einerlei.

X. a) Im ersten Quadranten sey die Tangente und Sekante positiv; so ist b) nach den bisherigen Beweisen im zweiten Quadranten sowohl Tangente, als Sekante negativ; c) für Bögen, die bis zum dritten Quadranten gehen, ist die Tangente positiv, die Sekante negativ. d) Im vierten Quadranten ist die Tangente negativ, die Sekante positiv.

§. 27. **Erklärung.** So, wie AK der Cosinus des Bogens BA ist, so wird nun auch TG die Cotangente, und CT die Cosekante für eben den Bogen BA angenommen.

§. 28. **Zusatz.** $\triangle$ CKA $\backsim$ CGT (205); daher CK : KA = CG : GT; aber CK = Sinus des Bogens BA; und KA = dessen Cosinus; daher sin : cos = sin tot : cotang; und cotang = $\frac{\text{sin tot} \times \text{cos}}{\text{sin}}$ (♂); auch ist CK : CA = CG : CT; oder sin : sin tot = sin tot : cosec; und cosec = $\frac{(\text{sin tot})^2}{\text{sin.}}$ (♃). Hieraus folgt nun:

I. Daß im ersten Quadranten cotang. und cosec. positiv sind, weil, für diesen Fall der Zähler und Nenner in beiden Formeln positiv sind.

II. Im zweiten Quadranten ist der Sinus positiv (Trig. 12, III), der Cosinus negativ (Trig. 20); dieses giebt für die Bögen im zweiten Quadranten, die Cotangente negativ, die Cosekante positiv.

III. Weil im dritten Quadranten der Sinus und Cosinus negativ ist, so ist die Cotangente dort positiv, die Cosekante negativ.

IV. Im vierten Quadranten sind die Sinus negativ, die Cosinus aber positiv; daher wird hier die Cotangente sowohl, als die Cosekante negativ.

Alle diese Schlüße für die Lage der Cotangente und Cosekante gründen sich auf die obigen Formeln; aber wenn man die Lage dieser Linien aus der Figur beobachtet, so kömmt man auf eben diese Schlüße.

§. 29. Zusatz. Die Formel (♃) giebt, daß in allen Fällen, wo der Sinus wächst, die Cosekante abnehme, und umgekehrt; aber die Formel (♂) giebt die Ab- und Zunahme der Cotangente wieder schneller; weil, wenn der Sinus wächst, zugleich der Cosinus abnimmt; folglich wird der Bruch im Zähler und Nenner zugleich kleiner oder größer. Daher wächst die Cotangente, oder sie nimmt ab, beides schneller, als die Cosekante, wenn der Sinus ab- oder zunimmt.

II. Wenn der Bogen $= 0$, so ist die Cotangente und Cosekante $= \infty$; weil der Nenner beider Formeln $= 0$ ist; wenn der Bogen $= 90°$, so ist Cotangente $= 0$; und die Cosekante $=$ sin tot; wenn der Bogen $= 180°$, so ist sowohl die Cotangente, als Cosekante $= \infty$; ist der Bogen $= 270°$, so ist Cot. $= 0$; und cosec $=$ sin tot und bei einem Bogen von 360° wird sowohl die Cotangente, als Cosekante $= \infty$.

§. 30. Zusatz. Der Bogen, der im ersten Quadranten angenommen wird, und kleiner, als 90° ist, heiße φ; und der Quadrante selbst R; so

so lassen sich alle bisherige Schlüße leicht in folgender Tabelle übersehen.

I. Für den Bogen φ sind alle Funktionslinien positiv.

	sin.	cos.	tang.	sec.	cot.	cosec.
II. Bogen = R	+ sin. tot.	+ o	+ ∞	+ ∞	+ o	+ sin. tot.
III. B. = 2 R − φ	+ sin. φ	− cos φ	− tang. φ	− sec. φ	− cot. φ	+ cosec φ
IV. Bog. = 2 R	+ o	− sin tot	− o	− sin. tot	− ∞	+ ∞
V. B. = 2R + φ	− sin. φ	− cos φ	+ tang. φ	− sec. φ	+ cot. φ	− cosec φ
VI. Bog. = 3 R	− sin. tot	− o	+ ∞	− ∞	+ o	− sin. tot.
VII. B. = 4R − φ	− sin. φ	+ cos φ	− tan. φ	+ sec. φ	− cot. φ	− cosec φ
VIII. Bog. = 4 R	− o	+ sin tot.	− o	+ sin. tot.	− ∞	+ ∞

Wenn

Wenn der Bogen bis in den fünften Quadranten wächst; so wird hier wieder alles, wie in dem ersten Quadranten; weil der Sinus und Cosinus so werden.

§. 31. Lehrsatz. Die trigonometrischen Funktionen (Trig. 6. Anmerk.) von ähnlichen Bögen verhalten sich, wie die Halbmesser dieser Bögen.

Beweis. In der 187ten Figur sind ab und AB ähnliche Bögen; weil sie einerlei Zahl Grade haben (§. 40). Eben so sind es die Ergänzungen AG; ag. Der Sinus des einen Bogens ist AD, Cosinus AK; Tangente BS; Sekante CS; Cosekante CT; ähnliche Linien zum andern Bogen sind mit den nämlichen kleinen Buchstaben bezeichnet. Nun ist wegen (205)
CB : Cb = AD : ad = BS : bs = CS : Cs. Ferner CG : Cg = KA : ka = GT : gt = CT : Ct.

§. 32. Aufgabe. Wenn der Halbmesser = r gegeben ist, den Sinus für einen Bogen zu finden, der nach der gewöhnlichen Abtheilung des Kreises, (Geom. 42. Anmerk.) ein bestimmter Theil des Kreises ist.

Auflösung. I. Der Sinus eines Bogens ist die halbe Senne des dopp. Bogens (128); wenn man daher zeigen kann, wie die Senne eines jeden Bogens als ein Theil des Halbmessers gefunden wird; indem man solche als Seite eines innern regulären Vieleckes betrachtet, so würde die ganze Aufgabe aufgelöst seyn. Nun ist nur bekannt, daß die Seite des Sechseckes = r sey; aber der Bogen dieser Senne ist = 60°, daher hat man den Sinus des Bogens 30° = ½ r.

II.

II. Man kann hier die Aufgabe (239) ganz brauchen; nur wird die Rechnung immer beschwerlicher, wie dieses die dortige Formel zu erkennen giebt.

III. Aber die Formel angewandt, so ist der Sinus eines Bogens von $15° = \frac{1}{2}$ Senne des Bogens von 30°; aber die Senne von 30° ist nach (239) $= \sqrt{(r^2(2 - \sqrt{3}))} = r . \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$ und ihre Hälfte $= \frac{1}{2} r . \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sin 15°$. Nach dieser Vorschrift findet man, durch weitere Rechnung den Sinus von $7°\frac{1}{2} = 7° 30'$; und weiter hin den Sinus von 3°45'; weiter den von 1°, 52', 30''; und so ferner durch Halbirungen.

IV. Die Senne eines Bogens von 90° oder DB in der 103ten Figur ist $= \sqrt{2r^2} = r . \sqrt{2}$; folglich $DF = \frac{1}{2} r . \sqrt{2} = \sin 45°$. Hieraus lassen sich wieder durch Halbirungen verschiedene Sinus, wie in (III) finden; nämlich sin 22°, 30'; ferner sin 11°, 15', u. s. w.

V. Um theils mehr Bequemlichkeit im Rechnen zu haben, auch um noch Sinus für Winkel zu finden, die sich in den obigen Halbirungen bei (III und IV) nicht geben, suche man die Senne des regulären Zehneckes. Sie kann auf folgende Weise gefunden werden. Es sey in der 188ten Figur der Bogen $AB = 36°$; und so die Senne AB = Senne des Zehneckes (135). Man verlänge AB bis in D, daß $BD = BC$ sey, so ist $\measuredangle w = \measuredangle y$ (59); aber $\measuredangle n = \measuredangle w + \measuredangle y$ (105); folglich $\frac{1}{2} n = \measuredangle y$. Weil der Winkel $= 36°$; so ist $m = n = 72°$, folglich $\frac{1}{2} n = 36°$; daher $\measuredangle y = \measuredangle x$; und $\measuredangle x + y = \measuredangle m$; daher auch $AD = DC$ (62). Es sey $AC = BD = r$; und $AB = Z$, so ist, weil

$\measuredangle$

$\sphericalangle x = \sphericalangle y$; $AC : (DC = AD) = AB : BD$ (207); d.i. $r : Z + r = Z : r$; folglig $r^2 = Z^2 + rZ$. Um hier Z durch r auszudrucken, mache man, daß das rechter Hand ein zweitheiliges Quadrat werde (Rechenk. 196). Man addirt zu beiden Seiten $\frac{1}{4}r^2$; so ist noch $r^2 + \frac{1}{4}r^2 = Z^2 + rZ + \frac{1}{4}r^2$; aber es ist $(Z + \frac{1}{2}r)^2 = Z^2 + rZ + \frac{1}{4}r^2$; daher $\sqrt{\frac{5r^2}{4}} = Z + \frac{1}{2}r$; oder $\frac{r}{2} . \sqrt{5} - \frac{1}{2}r = Z$. Aber

$$\tfrac{1}{2}Z = \sin 18° = \frac{r}{4} . \sqrt{5} - \tfrac{1}{4}r = \tfrac{1}{4}r . (\sqrt{5}) - 1).$$

Aus dem bekannten Z läßt sich, vermöge (239), auch die Senne des Bogens von 18° finden; und hieraus der Sinus für den Winkel von 9°; und so für 4°, 30′; und so für folgende Halbirungen.

§. 33. Zusatz. Der Sinus totus heiße auch r, so ist für alle Bögen, deren Sinus bekannt ist, jedesmal der $\cos = \pm \sqrt{(r^2 - \sin^2)}$ (Trig. 18). Die Zeichen wie in (Trig. 20) verstanden. Aber die nächstvorige Aufgabe zeigt, daß der Sinus sich allemal durch r, und noch Zahlen ausdrucken lasse; daher wird die Größe unter dem Wurzelzeichen wenigstens einartig; obschon vielleicht wegen dem irrationalen Ausdruck des Sinus, etwas zusammengesetzt.

§. 34. Zusatz. Da die Sinus aller Bögen kleiner sind, als der Halbmesser, wenn man nur den Bogen = 90°, und den Bogen = 270 ausnimmt (Trig. 16), so ist es sehr natürlich, den Halbmesser = 1 zu setzen; hierdurch werden die Rechnungen etwas abgekürzt.

§. 35. Anmerk. Es ist zwar oben (§. 32) gezeigt worden, wie man von sehr vielen Bögen die Sinus finden könne. Die folgenden Aufgaben, worinn wird gelehrt werden, wie man aus dem bekannten Sinus und Cosinus des einfachen Bogens, den Sinus und Cosinus des doppelten; und umgekehrt, aus dem Sinus und Cosinus des doppelten Bogens, jene des einfachen finden könne; ferner wie man aus den Sinus und Cosinus zweier Bögen den Sinus für die Summe beider Bögen, und für ihre Differenz finden könne, setzen wegen ihrer großen Mannigfaltigkeit gewiß die Sache außer allem Zweifel, daß es dann möglich sey, die Sinus für alle Bögen von einer Sekunde oder Tertie, und deren fortschreitendes Wachsthum auch nur in einer Sekunde, oder Tertie besteht, zu finden. Daß die Rechnungen beschwerlich werden, sieht man schon in (Trig. 30); allein sie sind doch möglich zu unternehmen.

Man hat nun zwar Tafeln, worinn die Sinus und Cosinus aller Bögen durch den ersten Quadranten (und weiter braucht man sie wohl nicht, dieses zeigen die zwo ersten Kolumen der Tafel in (Trig. 32) die von Minute zu Minute wachsen, berechnet stehen; allein Anfänger müßen doch die Möglichkeit solcher Berechnungen einsehen. Es ist wahr, die Algebra, besonders die höhere giebt Mittel zur Abkürzung der beschwerlichen Rechnungen; allein diese können hier nicht vorgetragen werden.

Die ersten Berechner dieser Tafeln, **Georg Joachim Rheticus**; **Johann Müller**; **Regiomontanus** und der Schüler des Rheticus **Valentin Otho**, und noch einige andere bedienten sich wirklich bei ihren Berechnungen der trigonometrischen Funktionen solcher mühesamen Methode, die Sennen zu finden. Nachher, als diese Funktionen schon berechnet waren, entdeckte die Algebra Rechnungsvortheile, die die Arbeit um die Hälfte würden erleichtert haben.

§. 36.

§. 36. **Anmerk.** Man hat anfangs, um die Rechnungen desto schärfer zu führen, den Halbmesser in 10000,000000 Theile getheilt, angenommen; und so durch Rechnung gefunden, wie viele solcher Theile auf jeden Sinus und Cosinus der Bögen von Minute zu Minute durch den Quadranten kommen.

Aus dieser Menge von Theilen erhellet, daß ein Theil sehr klein seyn müße, wenn der Halbmesser für sich nur mäßig groß ist. Und weil die in (Trig. 32) angeführten Rechnungen zeigen, daß es meistens dabei auf oftmaliges Wurzelausziehen ankomme, so brauchte man dabei nicht, wie sonst bei Irrationalzahlen noch Dezimaltheile der Wurzel zu suchen (Rechenk. 217). Begreiflich werden so die Sinus, und mit ihnen die übrigen trigonometrischen Funktionen sehr große Zahlen, mit denen man bei der Anwendung sehr beschwerlich rechnet; daher hat man für sie die Logarithmen berechnet. Offenbar wird so der Logarithme für den Sinus totus = 10 (Rechenk. 412, II). Man hat sich bei Berechnung der Logarithme für die Zahlen der Funktionen nach der Weisung verhalten, die in (Rechenk. 415, II) angegeben ist. So ist, nach dem obigen angenommenen Halbmesser, der Sinus von 30° = 5000,000000 = 50000 × 100000* = log 50000 + log 100000 = 4,6989700 + 5 = 9,6989700. Und bei den Sinuszahlen, die sich nicht in Faktoren zerlegen ließen, wurden die Logarithmen durch Proportionaltheile gesucht.

* also ein Logarithmus

Man hat in den Sinustafeln, wovon oben (Trig. 35) Erwähnung geschah, die Zahlen für die Funktionslinien nicht ganz hingesetzt, sondern allemal die drei letzten Stellen weggelassen, weil die Zahlen doch noch scharf genug angegeben sind; dieses ist nun eben soviel, als hätte man den Sinus totus nur in 10000000 Theile getheilt, angenommen. Das gäbe nun den Logarithme für den Sinus totus = 7; allein **Brigge** hatte schon die Logarithmen für die Sinus unter der Voraussetzung, daß der Sinus totus in 10000 Millionen Theilen angenommen werde, berechnet; man behielt daher die zu großen Kennziffern bei; weil das in

den Rechnungen mit Logarithmen kleinen Fehler bringt; denn man rechnet, wie schon erinnert ist, mit den trigonometrischen Linien nur in Proportionen; und da werden die Logarithmen gebraucht, wie die Glieder einer arithmetischen Proportion (Rechenk. 344), und aus (daselbst 341) ist begreiflich, daß die Glieder, die hier alle um 2 zu groß sind, doch das nämliche arithmetische Verhältniß geben.

§. 37. Aufgabe. Die Sinusse AE, DF zweier Bögen BA und AD sind gegeben, nebst deren Cosinusse CE, CF fig. 189; man soll erstens den Sinus und Cosinus ihrer Summe oder DH, und CH finden.

Zweitens. Aus den angegebenen Sinussen und Cosinussen zweier Bögen soll man den Sinus und Cosinus des Bogens, welcher der Unterschied beider Bögen ist, finden. Oder es ist gegeben des Bogens BA Sinus und Cosinus; auch des Bogens BD Sinus und Cosinus, und es wird gesucht des Bogens AD Sinus und Cosinus; denn der Bogen AD ist offenbar der Unterschied beider Bögen.

Auflösung. Erstens. Weil der Halbmesser AC zwischen BC und DC liegt, so muß DH, welche auf BC senkrecht ist, die AC in einem Punkte G schneiden. Nun ist $\measuredangle$ HGC $=$ $\measuredangle$ FGD (Geom. 47) und bei H und F sind rechte Winkel; daher $\triangle$ GFD $\backsim$ $\triangle$ GHC (205). Aber auch ist $\triangle$ GHC $\backsim$ AEC (202); folglich sind die drei Dreiecke ähnlich. Daher hat man:

I. CE : AC = DF : DG; hieraus wird DG, ein Stück des Sinus DH gefunden. Man muß nun nach GH, das andere Stück dieses Sinus suchen. Man hat hierzu:

II,

II. CE:AE = FD:FG; woher FG bekannt wird; und CF − FG = CG; daher nun

III. CA:AE = CG:GH; folglich so GH bekannt wird.

Es heiße der Bogen BA = α; AD = β; BD = $\alpha + \beta$; der Sinus totus, oder CB = r, so lassen sich die obigen Proportionen unter diesen Ausdrücken geben:

I. $\cos\alpha : r = \sin\beta : \frac{\sin\beta \cdot r}{\cos\alpha}$.

II. $\cos\alpha : \sin\alpha = \sin\beta : \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha}$, und CG = $\cos\beta - \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha}$.

III. $r \cdot \sin\alpha = \frac{\cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha}$; $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha^2 \cdot \sin\beta}{r \cdot \cos\alpha} = GH$; und

$DG + GH = DH = \sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta \cdot r}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha^2 \cdot \sin\beta}{r \cdot \cos\alpha}$. Des ersten Bruches Zähler und Nenner mit r multiplicirt, bringt ihn unter den Nenner des zweiten, und dann die Addition wirklich gemacht, giebt $\frac{\sin\beta \cdot r^2 - \sin\beta \cdot \sin\alpha^2 + \sin\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha}{r \cdot \cos\alpha}$; aber

$\sin\beta\, r^2 - \sin\beta . \sin\alpha^2 = \sin\beta . (r^2 - \sin\alpha^2)$ $= \sin\beta . \cos\alpha^2$, weil $r^2 - \sin\alpha^2 = \cos\alpha^2$ (Trig. 20); folglich $\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta . \cos\alpha + \sin\alpha . \cos\beta}{r}$.

In Worten läßt sich die Regel leicht ausdrücken.

Zweitens. Gegeben ist CE; AE; DH; CH man sucht DF. Die Aehnlichkeit der Dreiecke CEA; CHD; FDG erhellet aus oben. Man hat daher I; CE:EA = CH:HG, woraus sich HG findet; aber DG = DH − HG; nun ist II; CA:CE = DG:DF. Daher wird auch so DF bekannt. Der Bogen BA sey $= \alpha$; BD $= \gamma$; AD $= \delta$, so ist in I; $\cos\alpha : \sin\alpha = \cos\gamma : \frac{\sin\alpha . \cos\gamma}{\cos\alpha}$ und DG $= \sin\gamma - \frac{\sin\alpha . \cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{\sin\gamma . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos\gamma}{\cos\alpha}$; daher II; $r : \cos\alpha = \frac{\sin\gamma . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos\gamma}{\cos\alpha} : \frac{\sin\gamma . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos\gamma}{r}$ $= \sin\delta = \sin(\gamma - \alpha)$.

§. 38. Zusatz. Es sey $\alpha = \beta$, so verwandelt sich die Formel für den Sinus der Summe in diese $\sin 2\alpha = \frac{2 . (\sin\alpha . \cos\alpha)}{r}$

§. 39. Zus. Es ist zwar in (Trig. 30) gezeigt worden, wie man jedesmal aus dem Sinus den Cosinus finden könne, allein dort nicht anders, als durch Wurzelausziehen; die itzt folgende Methode, die Cosinus der Bögen, wie sie in (Trig. 37) ge-

nannt

nannt sind, durch Produkte zu finden, hat auch in vielen andern Rechnungen gute Anwendung, und verdient daher gewiß eine genaue Auseinandersetzung. Nun ist für den ersten Fall I; $CE:AE = FD:FG$; und $CG = CF - FG$; daher II; $CA:CE = CG:CH$; aber $CG =$

$$\frac{\cos\beta \, . \, \cos\alpha - \sin\alpha \, . \, \sin\beta}{\cos\alpha}$$ (Trig. 37 erst. Fall)

daher wird II; $r : \cos\alpha =$

$$\frac{\cos\beta \, . \, \cos\alpha - \sin\beta \, . \, \sin\alpha}{\cos\alpha} : \frac{\cos\beta \, . \, \cos\alpha \; \sin\beta \, . \, \sin\alpha}{r}$$

$= CH = \cos(\alpha + \beta)$.

Zweiter Fall. CF wird gesucht. Man hat schon in (Trig. 37) GD berechnet; daher ist $CA : AE = GD : GF$; oder $r : \sin\alpha =$

$$\frac{\sin\gamma . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos\gamma}{\cos\alpha} : \frac{\sin\alpha}{r}\left(\frac{\sin\gamma . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos . \gamma}{\cos\alpha}\right)$$

$= GF$; und ferner $CE : CA = CH : CG$; oder

$\cos\alpha : r = \cos\gamma : \left(\frac{r \, . \cos\gamma}{\cos\alpha} = CG\right)$; aber $CG +$

$$GF = CF = \cos(\gamma - \alpha) = \frac{r \, . \, \cos\gamma}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha \, . \, (\sin\gamma \, . \, \cos\alpha - \sin\alpha \, . \cos\gamma)}{r \, . \, \cos\alpha} =$$

$$\frac{r \; \cos\gamma}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha \, . \, \cos\alpha \, . \, \sin\gamma}{r \, . \, \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha^2 \, . \, \cos\gamma}{r . \cos\alpha};$$

der erste und dritte Theil unter einerlei Nenner

gebracht, und zusammengerechnet, giebt

$$\frac{r^2 \cdot \cos\gamma}{r \cdot \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha^2 \cdot \cos\gamma}{r \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos\gamma(r^2 - \sin\alpha^2)}{r \cdot \cos\alpha}$$

$$= \frac{\cos\gamma \cdot \cos\alpha^2}{r \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos\gamma \cdot \cos\alpha}{r};$$ der zweite Theil ist $= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}{r \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}{r}$; daher endlich $\cos(\gamma - \alpha) = \frac{\cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\alpha}{r}$

§. 40. Zusatz. Ist auch hier für den ersten Fall $\alpha = \beta$; so ist $\cos 2\alpha = \frac{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}{r}$.

§. 41. Zusatz. I. Wollte man den Sinus und Cosinus des dreifachen Bogens finden, so sey $2\alpha = n$; so ist aus (Trig. 38) $\sin n$, und aus Trig. 40) $\cos n$ bekannt; daher wird die Formel in (§. 37) hier angewandt, und giebt $\sin 3\alpha = \frac{\sin n \cdot \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos n}{r}$.

Für den Cosinus verwandelt sich die Formel (Trig. 39) in diese; $\frac{\cos n \cdot \cos\alpha - \sin n \cdot \sin\alpha}{r} = \cos 3\alpha$.

II. Man heiße den Bogen $3\alpha = \theta$, so ist $\sin 4\alpha = \frac{\sin\theta \cdot \sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\theta}{r}$; und $\cos 4\alpha = \frac{\cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\theta \cdot \sin\alpha}{r}$. Daß man die Arbeit,

um

um des fünffachen Bogens Sinus und Cosinus zu finden, fortsetzen könne, ist klar. Eine allgemeine Regel, für jeden vielfachen Bogen den Sinus und Cosinus zu finden, giebt die Algebra.

§. 42. Zusatz. Will man die obigen Formeln brauchen, den Sinus und Cosinus des halben Bogens zu finden, wenn der Sinus und Cosinus des ganzen gegeben ist, so kann man die Formel (Trig. 40) am besten zur Rechnung brauchen.

In dieser Formel schaffe man $\cos\alpha^2$ weg; es ist nämlich $\cos\alpha^2 = r^2 - \sin\alpha^2$; daher wird dort

$$\cos 2\alpha = \frac{r^2 - 2\sin\alpha^2}{r};$$ und $r \,.\, \cos 2\alpha = r^2 - 2\sin\alpha^2$; folglich $\sin\alpha^2 = \frac{1}{2} r \,.\, (r - \cos 2\alpha)$; und hieraus erhält man $\sin\alpha = \sqrt{(\frac{1}{2} r (r - \cos 2\alpha))}$. Um den $\cos\alpha$ zu haben, schaffe man aus der Formel $\sin\alpha^2$ weg, so wird $r \,.\, \cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - (r^2 - \cos\alpha^2) = 2\cos\alpha^2 - r^2$ und $\frac{1}{2} r(\cos 2\alpha + r) = \cos\alpha^2$; folglich $\cos\alpha = \sqrt{(\frac{1}{2} r (\cos 2\alpha + r)}$.

§. 43. Zusatz. I. Die bisherigen Formeln sind aus den Proportionen hergeleitet; aber diese Proportionen setzen offenbar voraus, daß die Bögen zusammen nicht über den ersten Quadranten hinausgehen; daher braucht man nicht zu beweisen, daß der Zähler für $\sin(\alpha+\beta)$ in der Formel (37) nicht größer seyn könne, als r. Denn wäre er das, so wäre dieser Sinus etwas Ungereimtes, weil es wohl keinen größern Sinus, als r geben kann (Trig. 12, V).

II. Würde aber $\alpha+\beta$ größer, als 90°, so ist offenbar der Cosinus von $(\alpha+\beta)$ verneint (Trig.

21, II). Dieses Verneinte wird aber auch die Formel (37, II Fall) angeben.

III. Die Formel (Trig. 37, I Fall) für den Sinus des Bogens, der so, wie in (II) aus $\alpha + \beta$ zusammengesetzt wird, und dann mehr, als 90° beträgt, zu untersuchen, unter welchen Umständen sie den größten Sinus gebe; ferner, wie diese Formel selbst das allmälige Abnehmen des Sinus angebe, wenn der Bogen immer weiter in den zweiten Quadranten wächst (wie dieses in Trig. 12, I erwiesen ist); dieses läßt sich hier nicht thun. Es kömmt bei der Untersuchung auf folgendes an: Der Sinus ist die mittlere Proportionallinie zwischen Quer- u. dem Cosin + dem Halbmesser; oder Quers: sin = sin : cos + r (212), und Quers × (cos+r) = sin²; und wenn das erste Produkt das größte wird, so wird der Sinus der größte; und das Ab- und Zunehmen des Produktes, giebt das Ab- und Zunehmen des Sinus an.

Die Untersuchung aber gehört in die höhere Analytik. Nur folgendes kann aus der Formel gemerkt werden: Der Bogen α behalte seine angenommene Größe; aber der hinzugekommene Bogen β werde verschiedentlich größer; so wird sein Sinus immer größer, wenn β noch unter 90°; sein Cosin aber wird so immer kleiner; daher wird der erste Theil der Formel größer, der andere aber kleiner; freilich geschieht dieses nicht in einerlei Verhältnisse. Würde der Bogen β über 90°, so wäre sein Cosinus, und so der 2te Theil der Formel negativ; daher würde so der Sinus nicht nur kleiner, sondern er könnte selbst negativ werden, und der Bogen $\alpha + \beta$ würde bis in den dritten Quadranten reichen. Wäre

sin

sin β negativ, d. i. β selbst über 180°; so würden beide Theile der Formel negativ; bei β über 270° wird wieder der zweite Theil positiv, und der erste negativ; daher die Formel selbst positiv, oder negativ; für den ersten Fall würde α + β über 360°, für den zweiten über 270° seyn.

IV. Die Formel für den Sinus vom Unterschied zweier Bögen, läßt sich eben so erklären.

V. Weil aber der Unterschied zweier Größen sowohl positiv, als negativ seyn kann (Rechenk. 338), so kann dieser Bogen, welcher der Unterschied ist, selbst negativ seyn (wenn man nämlich den größern Bogen vom kleinern abzieht); und wurde so in der Bedeutung (Trig. 22) angenommen; und auch die dortige Lage der Sinus und Cosinus erhalten. Daher müßte man eigentlich wissen, ob das δ in (37) positiv, oder negativ sey; um die Formeln für dessen Sinus und Cosinus recht brauchen zu können.

§. 44. Aufgaben. Aus den Formeln (Trig. 37, u. f.). I. Die Tangente von α + β.

II. Die Tangente von γ − α.

III. Die Sekante beider Bögen.

IV. Die Cotangente. Und

V. Die Cosekante beider Bögen zu finden.

Auflösung. Aus (Trig. 26) ist $\tang(\alpha+\beta) = \frac{r \times \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = r . \left(\left(\frac{\sin\beta.\cos\alpha + \sin\alpha.\cos\beta}{r}\right)\right.$
$\left.\times\left(\frac{r}{\cos\beta.\cos\alpha - \sin\beta.\sin\alpha}\right)\right) =$

r.

$r.\left(\frac{\sin\beta\,.\,\cos\alpha+\sin\alpha\,.\,\cos\beta}{\cos\beta\,.\cos\alpha-\sin\beta\,.\,\sin\alpha}\right)$. Man dividire den Zähler und Nenner mit $\cos\beta\,.\,\cos\alpha$; so wird aus dem Zähler $\frac{r\,.\,\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{r\,.\sin\alpha}{\cos\alpha}$; aber offenbar ist das $\tang\beta+\tang\alpha$ (Trig. 26); der Nenner wird $1-\frac{\sin\beta\,.\sin\alpha}{\cos\beta\,.\cos\alpha}$; aber $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\tang\beta}{r}$; und so $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\tang\alpha}{r}$; daher ist $\frac{\sin\beta\,.\,\sin\alpha}{\cos\beta\,.\,\cos\alpha}=$ $\frac{\tang\beta\times\tang\alpha}{r^2}$; und $1-\frac{\sin\beta\,.\,\sin\alpha}{\cos\beta\,.\,\cos\alpha}=$ $\frac{r^2-\tang\beta\,.\tang\alpha}{r^2}$; folglich ist $\tang(\alpha+\beta)=$ $r^2.\left(\frac{\tang\beta+\tang\alpha}{r^2-\tang\beta\,.\,\tang\alpha}\right)$.

II. $\mathrm{Tang}\,(\gamma-\alpha)=\frac{r\,.\,\sin\gamma-\alpha)}{\cos\gamma-\alpha}=$ $r\,.\left(\frac{\sin\gamma\,.\cos\alpha-\sin\alpha\,.\cos\gamma}{\cos\gamma\,.\cos\alpha+\sin\gamma\,.\sin\alpha}\right)$; und auch hier mit $\cos\gamma\,.\cos\alpha$ den Zähler und Nenner dividirt, giebt $r^2\,.\left(\frac{\tang\gamma-\tang\alpha}{r^2+\tang\gamma\,.\tang\alpha}\right)=\tang(\gamma-\alpha)$.

III. Aus (Trig. 26) ist $\sec(\alpha+\beta)=\frac{r^2}{\cos(\alpha+\beta)}$ $=$

$= \frac{r^3}{\cos\beta \,.\, \cos\alpha - \sin\beta \,.\, \sin\alpha}$; eben so ist sec $(\gamma - \alpha) = \frac{r^3}{\cos\gamma \,.\, \cos\alpha + \sin\gamma \,.\, \sin\alpha}$. Diese Ausdrücke lassen sich, wenn man Zähler und Nenner mit dem Produkte aus den beiden Cosinussen dividirt, in folgende verwandeln; nämlich des ersten Zähler ist $\frac{r^3}{\cos\beta \,.\, \cos\alpha} = \frac{r^2}{\cos\beta} \,.\, \frac{r}{\cos\alpha}$; der Nenner ist, nach oben $1 - \frac{\sin\beta \,.\, \sin\alpha}{\cos\beta \,.\, \cos\alpha} = \frac{r^2 - \text{tang}\,.\,\beta \,.\, \text{tang}\,\alpha}{r^2}$; daher wird nach gehöriger Rechnung $\sec(\alpha + \beta) = r \,.\, \left(\frac{\frac{r^2}{\cos.\beta} \,.\, \frac{r^2}{\cos\alpha}}{r^2 - \tan\beta.\tan\alpha}\right)$ $= r \,.\, \left(\frac{\sec\beta \,.\, \sec\alpha}{r^2 - \text{tang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\alpha}\right)$. Und sec $(\gamma - \alpha)$ $= r \left(\frac{\sec\gamma \,.\, \sec\alpha}{r^2 + \text{tang}\,\gamma \,.\, \text{tang}\,\alpha}\right)$.

IV. Aus (Trig. 28) ist $\cot(\alpha + \beta) = \frac{r \,.\, \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$. Nun ist $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{r}{\text{tang}(\alpha + \beta)}$; den in (I) ist $\text{tang}\,(\alpha + \beta) =$

r.

$\frac{r \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$; daher tang$(\alpha+\beta)$. $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ $= r$, folglich $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r}{\text{tang}(\alpha+\beta)}$; folglich ist cotang $(\alpha+\beta) = \frac{r^2}{\text{tang}(\alpha+\beta)} =$ $\frac{r^2 . (r^2 - \text{tang}\,\beta . \text{tang}\,\alpha)}{r^2 . (\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\alpha)} = \frac{r^2 - \text{tang}\,\beta . \text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta + \text{tang}\,\alpha}$ die cotang $(\gamma-\alpha)$ ist daher auch $\frac{r^2}{\text{tang}(\gamma-\alpha)} =$ $\frac{r^2 + \text{tang}\,\gamma . \text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\alpha}$.

V. Aus (Trig. 28) ist cosec $(\alpha+\beta) =$ $\frac{r^2}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{r^3}{\sin\beta . \cos\alpha + \sin\alpha . \cos\beta}$; auch ist cosec $(\gamma-\alpha)$ $\frac{r^3}{\sin\gamma . \cos\alpha - \cos\gamma . \sin\alpha}$. Man multiplicire in beiden Formeln den Zähler und Nenner mit r^2; und dividire dann den Zähler und Nenner der ersten Formel mit $\sin\beta . \cos\alpha$; und der zweiten mit $\sin\gamma . \cos\alpha$; so wird der Zähler der ersten $r . \frac{r^2}{\sin\beta} \times \frac{r^2}{\cos\alpha}$; dieses giebt offenbar r . cosec β . sec α; der Nenner ist $r^2 +$ $\frac{r . \sin\alpha}{\cos\alpha} . \frac{r \cos\beta}{\sin\beta} = r^2 + \text{tang}\,\beta . \cot\alpha$; folglich ist

ist $\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{r \,.\, \operatorname{cosec}\beta \,.\, \sec\alpha}{r^2 + \operatorname{tang}\beta \,.\, \cot\alpha}$. Auf eben die Art gerechnet wird $\operatorname{cosec}(\gamma - \alpha) = \frac{r \,.\, \operatorname{cosec}\gamma \,.\, \sec\alpha}{r^2 - \operatorname{tang}\gamma \,.\, \cot\alpha}$

§. 45. Zusatz. I. Folglich ist die Tangente des doppelten Bogens; oder $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2r \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\alpha}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}$ Man dividire Zähler und Nenner mit α^2, so wird aus dem Zähler $\frac{2r \,.\, \sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\operatorname{tang}\alpha$; der Nenner ist (wie das in 44, I gezeigt ist), $1 - \frac{\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2} = 1 - \frac{\operatorname{tang}\alpha^2}{r^2} = \frac{r^2 - \operatorname{tang}\alpha^2}{r^2}$; folglich $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2r^2 \,.\, \operatorname{tang}\alpha}{r^2 - \operatorname{tang}\alpha^2}$.

II. $\operatorname{Sec} 2\alpha = \frac{r^3}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2} = \frac{r \,.\, \sec\alpha^2}{r^2 - \operatorname{tang}\alpha^2}$; denn man multiplicire den Zähler und Nenner mit r^2; und dividire dann wieder Zähler und Nenner mit $\cos\alpha^2$. Auch ist $\sec 2\alpha = \sqrt{(r^2 + \operatorname{tang} 2\alpha^2)}$; aber die Rechnung wird, wenn man den obigen Werth von tang 2 α gehörig braucht, etwas beschwerlich.

III. $\operatorname{Cot} 2\alpha = \frac{r^2}{\operatorname{tang} 2\alpha}$ (Trig. 44, IV) $= \frac{r^2 - \operatorname{tang}\alpha^2}{2\operatorname{tang}\alpha}$.

IV.

IV. $\text{Cosec}\, 2\alpha = \frac{r^2}{\sin 2\alpha} = \frac{r^3}{2 \sin\alpha . \cos\alpha} =$

$\frac{r^4}{2r . \sin\alpha . \cos\alpha} = \left(\frac{r^2}{\sin\alpha} . \frac{r^2}{\cos\alpha}\right) : 2r =$

$\frac{\text{cosec}\,\alpha . \sec\alpha}{2r}.$

Anmerk. Die Tangente; Sekante; Cotangente; Cosekante für den drei- oder vierfachen Bogen zu berechnen, braucht es nichts weiter, als in den Formeln (Trig. 44) statt $\sin\beta$; $\cos\beta$, nur zu schreiben $\sin\eta$; $\cos\eta$, oder $\sin\vartheta$; $\cos\vartheta$; nur die Sache nach (Trig. 41, I und II) gehörig verstanden.

§. 46. Zusatz. I. Die Tangente des halben Bogens, oder $\tan\alpha$ ist $= \frac{r . \sin\alpha}{\cos\alpha} = r \times \sqrt{\left(\frac{r - \cos 2\alpha}{r + \cos 2\alpha}\right)}$ nach (Trig. 42), wenn man hier im Zähler und Nenner den dortigen Faktor $\frac{1}{2}r$ weg läßt, folglich $\tan\alpha^2 = \frac{r^2 . (r - \cos\alpha)}{r + \cos 2\alpha} = r\left(\frac{r^2 - r . \cos 2\alpha}{r + \cos 2\alpha}\right)$. Man dividire Zähler und Nenner mit $\cos 2\alpha$; so wird der Zähler $= r\left(\frac{r^2}{\cos 2\alpha} - r\right) = r(\sec 2\alpha - r)$; der Nenner ist $\frac{r}{\cos 2\alpha} + 1 = \frac{\sec 2\alpha}{r} + 1 = \frac{\sec 2\alpha + r}{r}$;

folg-

folglich $\tan \alpha^2 = r^2 . \left(\frac{\sec 2\alpha - r}{\sec 2\alpha + r}\right)$, und hier Zähler und Nenner mit $\sec 2\alpha + r$ multiplicirt, giebt den Bruch $\frac{\sec 2\alpha^2 - r^2}{(\sec 2\alpha + r)^2}$. Hievon ist der Zähler $= \tan 2\alpha^2$; folglich ist $\tan \alpha = \frac{r . \tan 2\alpha}{\sec 2\alpha + r}$. Hätte man in der letztern Umänderung, statt den Zähler und Nenner mit $\sec 2\alpha + r$ zu multipliciren, denselben mit $\sec 2\alpha - r$ multiplicirt, so hätte sich der Bruch in folgenden Ausdruck verwandelt $\frac{(\sec 2\alpha - r)^2}{\sec 2\alpha^2 - r^2} = \frac{(\sec 2\alpha - r)^2}{\tan 2\alpha^2}$; mit r^2 multiplicirt, und die Quadratwurzel ausgezogen, giebt wie oben $\tan \alpha = \frac{r . (\sec 2\alpha - r)}{\tan 2\alpha}$.

II. $\sec \alpha = \frac{r^2}{\cos \alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(\frac{1}{2} r (\cos 2\alpha + r))}}$

und $\sec \alpha^2 = \frac{r^4}{\frac{1}{2}(r \cos 2\alpha + r^2)} =$

$$\frac{2 r^2 . \left(\frac{r^2}{\cos 2\alpha}\right)}{r + \frac{r^2}{\cos 2\alpha}} = \frac{2 r^2 . \sec 2\alpha}{r + \sec 2\alpha};$$ folglich $\sec \alpha$

$= r . \sqrt{\left(\frac{2 . \sec 2\alpha}{r + \sec 2\alpha}\right)}$.

III.

$$\text{III. } \operatorname{Cot}\alpha = \frac{r^2}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{r.(\sec 2\alpha + r)}{\operatorname{tang} 2\alpha} =$$

$\frac{r.\operatorname{tang} 2\alpha}{\sec 2\alpha - r}$ ist nach den Formeln für tang α in (I) gerechnet.

$$\text{IV. } \operatorname{Cosec}\alpha = \frac{r^2}{\sin\alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{(\frac{1}{2}r(r - \cos 2\alpha))}};$$

folglich $\operatorname{cosec}\alpha^2 = \frac{r^4}{\frac{1}{2}r.(r - \cos 2\alpha)} = \frac{2r^4}{r^2 - r\cos 2\alpha}$

$$= \frac{2r^2 . \frac{r^2}{\cos 2\alpha}}{\frac{r^2}{\cos 2\alpha} - r} = \frac{2r^2 . \sec 2\alpha}{\sec 2\alpha - r}; \text{ und folglich}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = r\sqrt{\left(\frac{2\sec 2\alpha}{\sec 2\alpha - r}\right)}.$$

§. 47. **Anmerk.** Die bisher geführten Rechnungen zeigen gewiß hinlänglich, wie die trigonometrischen Funktionen berechnet werden könnten. Aber die Formeln für die Funktionen der Summe, oder Differenz zweier Bögen, auch des doppelten und halben Bogens, haben in den Rechnungen, der andern Theile der Mathematik, vorzüglich auch in der Astronomie ihren vielfachen Gebrauch; und können daher Anfängern, die nur irgend in einem Theile der angewandten Mathematik etwas zu thun gedenken, nicht genug empfohlen werden. Bei Anwendungen der trigonometrischen Funktionen wird, um die Rechnungen einfacher zu machen, der Sinus totus, oder r in den obigen Formeln = 1 gesetzt; daher sollen nun folgende Exempel zeigen, wie man sich bei solchen Rechnungen zu verhalten habe.

§. 48. Zusätze. I. Es sey das bisher gebrauchte r eben der Sinus totus, der bei Berechnung der Tafeln zum Grunde gelegt wurde (Trig. 36); und so ließen sich denn durch Hilfe der obigen Formeln die Funktionslinien für alle Grade, Minuten und Sekunden, und wenn man wollte, sogar für Tertien, berechnen.

II. Wenn man den Sinus totus = 1 setzt, so sind offenbar alle Funktionslininen, Zahlen, und man hat nun keine Diminsionen bei ihnen; allein wird der Sinus totus als eine Linie verstanden, so muß man genau beobachten, was von Dimensionen, gesagt wurde, um Fehler im Rechnen zu vermeiden, wovon (477) Erwähnung geschehen ist.

III. Ich will die Funktionslinie, die zum Sinus totus = 1 gehören, mit deutschen, und die zu r gehörigen, mit lateinischen Buchstaben benennen; der Bogen sey immer von der nämlichen Zahl Grade; und heiße x, so ist wegen (Trig. 31) $1 : r = \text{Sin}\, x : \sin x$, und hieraus $r \cdot \text{Sin}\, x = \sin x$, oder $\frac{\sin x}{r} = \text{Sin}\, x$; eben so hat man für die übrigen Funktionen $\frac{\cos x}{r} = \text{Cosin}\, x$; $\frac{\text{tang}\, x}{r} = \text{Tang}\, x$; u. s. w. Die Sache läßt sich unter folgender Regel leicht merken:

1) Hat man die Funktionen nach dem Halbmesser 1 berechnet, und man will sie in Theilen eines jeden andern Halbmessers ha-

ben, so werden die so berechneten Funktionen mit dem andern Halbmesser multiplicirt. Umgekehrt:

2) Hat man die Funktionen nach irgend einem Halbmesser berechnet, und man will sie in solchen berechnen, die zum Halbmesser = 1 haben, so werden die berechneten mit ihrem Halbmesser dividirt, dieses giebt die nämliche Funktionen, nur für den Halbmesser = 1.

Exempel. Die Funktionen in den Tafeln sind für den Halbmesser = 10,000000 (36). Nun findet man in den Tafeln sin 1° = 174524; folglich Sin 1° = 0,0174524; so ist sin 1′ = 2909; daher Sin 1′ = 0,0002909:

Will man die Logarithmen der Tafelfunktionen in die Logarithmen für die Funktionen verwandeln, welche zum Sinus totus 1 haben, so muß man überall die Kennziffer der Tafellogarithmen um 10 vermindern; dieses erhellet aus (Trig. 36); hierbei werden negative Logarithmen heraus kommen; deren Sinn und Gebrauch (Rechenk. zu Ende) ist gezeigt worden.

§. 49. Zusatz. Wenn der Sinus eines Bogens bekannt ist; so sind die Formeln für die übrigen, auf den Halbmesser = 1 gebrachten Funktionen folgende: ich heiße den Bogen φ

$$\cos\varphi = \sqrt{(1 - \sin\varphi^2)};$$

$$\tang\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\sec\varphi = \sqrt{(1 + \tang\varphi^2)} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

cot

$$\cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} = \sqrt{(1+\cot\varphi^2)}$$

§. 50. Zusatz. Hieraus erhellet, daß man aus dem bekannten Sinus eines Bogens die übrigen Funktionen leicht herleiten könne. Auch so bestimmen sich Tangente und Sekante wechselweise, wenn eine bekannt ist; denn $\text{tang}\,\varphi = \sqrt{(1 - \sec\varphi^2)}$ und $\sec\varphi = \sqrt{(1 + \text{tang}\,\varphi^2)}$; so ist $\cot\varphi = \sqrt{(1 - \operatorname{cosec}\varphi^2)}$, und $\operatorname{cosec}\varphi = \sqrt{(1 + \cot\varphi^2)}$.

§. 51. Zusatz. Weil $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$, so ist klar, daß es einerlei sey, mit dem Cosinus eines Bogens zu dividiren, oder mit dessen Sekante zu multipliciren. Daher, wenn K eine gewisse Größe bedeutet; so erhält man wegen den Gleichungen (Trig. 49) folgende allgemeine Formeln $K.\sec\varphi = \frac{K}{\cos\varphi}$; und $K.\cos\varphi = \frac{K}{\sec\varphi}$; Ferner $\frac{K.\sin\varphi}{\cos\varphi} = K.\text{tang}\,\varphi$.

Auch ist $K.\cot\varphi = \frac{K}{\text{tang}\,\varphi}$; und $K.\text{tang}\,\varphi = \frac{K}{\cot\varphi} = \frac{K.\sin\varphi}{\cos\varphi} = K.\sin\varphi.\sec\varphi$; ferner $K.\operatorname{cosec}\varphi = \frac{K}{\sin\varphi}$; auch $K.\sin\varphi = \frac{K}{\operatorname{cosec}\varphi}$

 §. 52.

§. 52. Zusatz. $\text{Tang}\ \varphi \cdot \sec\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} = \frac{\sin\varphi}{1-\sin\varphi^2}$; auch ist $\frac{\tang\varphi}{\sec\varphi} = \sin\varphi$, und $\frac{\sec\varphi}{\tang\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} = \text{cosec}\ \varphi$.

Eben so ist $\cot\varphi \cdot \text{cosec}\ \varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^2} = \frac{1}{\tang\varphi \cdot \sin\varphi}$; und $\frac{\cot\varphi}{\text{cosec}\ \varphi} = \cos\varphi$ und $\frac{\cos\varphi}{\cot\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} = \sin\varphi \cdot \sec\varphi^2$.

§. 53. Zusatz. $\text{Tang}\ \varphi \cdot \cot\varphi = 1$; und $\tang\varphi \cdot \text{cosec}\ \varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$. Ferner $\sec\varphi \cdot \cot\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} = \text{cosec}\ \varphi$; und $\sec\varphi \cdot \text{cosec}\ \varphi = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}$.

Auch ist $\frac{\tang\varphi}{\cot\varphi} = \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \tang\varphi^2$; und $\frac{\cot\varphi}{\tang\varphi} = \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2} = \cot\varphi^2$; und $\frac{\tang\varphi}{\text{cosec}\ \varphi} = \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi} = \sin\varphi^2 \cdot \sec\varphi$; und

co-

$\frac{\text{cosec}\,\varphi}{\text{tang}\,\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^2} = \cot\varphi\,.\,\sec\varphi.$ Auch hat man

$\frac{\sec\varphi}{\text{cosec}\,\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \text{tang}\,\varphi$; und

$\frac{\text{cosec}\,\varphi}{\sec\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\varphi.$

Anmerk. Der Gebrauch der bisher entwickelten Formeln (50, 51, 52, 53) hat vielfache Anwendungen in den Rechnungen, wovon (Trig. 47) Erwähnung geschahe. Man kann dieses nur hier sagen, ohne diese Anwendung zu zeigen. Man sieht aus den gleichbedeutenden Ausdrucken, daß man in Rechnungen einen statt des andern brauchen könne. Und wenn irgend eine Größe, wie das K in (51) mit einem Produkte, oder Quotienten von ein Paar Funktionen multiplicirt ist, so wird man in Rechnungen sehen, welcher Ausdruck der vortheilhafteste ist, die Rechnung abzukürzen. Solche Vortheile verschaft die Annahme des Sinus totus = 1.

§. 54. Zusätze. Die Verwandelung der Formeln (Trig. 37 u. f) das dortige r = 1 gesetzt.

Hier ist $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\,.\,\cos\alpha + \cos\beta\,.\,\sin\alpha$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\,.\,\cos\alpha - \sin\beta\,.\,\sin\alpha.$

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta) = \frac{\sin\beta\,.\,\cos\alpha + \cos\beta\,.\,\sin\alpha}{\cos\beta\,.\,\cos\alpha - \sin\beta\,.\,\sin\alpha} = \frac{\text{tang}\,\alpha + \text{tang}\,\beta}{1 - \text{tang}\,\alpha\,.\,\text{tang}\,\beta}.$$

$$\sec(\alpha+\beta) = \frac{1}{\cos\beta\,.\,\cos\alpha - \sin\beta\,.\,\sin\alpha} =$$

 sec

$$\frac{\sec\beta \cdot \sec\alpha}{1 - \tan\beta \cdot \tan\alpha}.$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \frac{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta}$$

$$\operatorname{cosec}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha} = \frac{\operatorname{cosec}\beta \cdot \sec\alpha}{1 + \tan\beta \cdot \cot\alpha}.$$

§. 55. Zusatz. $\sin(\gamma - \alpha) = \sin\gamma \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\gamma$

$$\cos(\gamma - \alpha) = \cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\alpha.$$

$$\tan(\gamma - \alpha) = \frac{\tan\gamma - \tan\alpha}{1 + \tan\gamma \cdot \tan\alpha}.$$

$$\sec(\gamma - \alpha) = \frac{\sec\gamma \cdot \sec\alpha}{1 + \tan\gamma \cdot \tan\alpha}$$

$$\cot(\gamma - \alpha) = \frac{1 + \tan\gamma \cdot \tan\alpha}{\tan\gamma - \tan\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}(\gamma - \alpha) = \frac{\operatorname{cosec}\gamma \cdot \sec\alpha}{1 - \tan\gamma \cdot \cot\alpha}.$$

§. 56. Zusatz. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2$; aber es ist

$\cos\alpha^2 = 1 - \sin\alpha^2$; auch ist

$\sin\alpha^2 = 1 - \cos\alpha^2$; daher ist

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1$,

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan\alpha^2}.$$

$$\sec 2\alpha = \frac{\sec \alpha^2}{1 - \tang \alpha^2}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1 - \tang \alpha^2}{2 \tang \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} 2\alpha = \frac{\operatorname{cosec} \alpha \cdot \sec \alpha}{2}.$$

§. 57. **Zusatz.** Der Sinus des halben Bogens, nach (Trig. 42) $\sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right)}$; und $\cos \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right)}$; $\tang \alpha = \frac{\tang 2\alpha}{\sec 2\alpha + 1}$

$$= \frac{\sec 2\alpha - 1}{\tang 2\alpha}$$

$$\sec \alpha = \sqrt{\left(\frac{2}{\cos 2\alpha + 1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 \sec 2\alpha}{1 + \sec 2\alpha}\right)}$$

$$\cot \alpha = \frac{\tang 2\alpha}{\sec 2\alpha - 1} = \frac{\sec 2\alpha + 1}{\tang 2\alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{\left(\frac{2}{1 - \cos 2\alpha}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2 \sec 2\alpha}{\sec 2\alpha - 1}\right)}$$

Anmerk. Weil, wie schon ist erinnert worden, diese Formeln, die sich auf sin tot = 1 beziehen, meistens in Rechnungen gebraucht werden, so hat man bei der Umänderung, um sie wieder in Linien zu haben, nur die Gründe der Dimensionen zu beobachten, um zu wissen, ob man mit r, oder r^2 (ich verstehe unter r hier jeden Halbmesser, den man

nicht = 1 setzt), multipliciren oder dividiren müße. Soll z. B.

$\frac{2 \sec \varphi}{\sec \varphi \quad 1}$ eine Linie seyn, so muß der Zähler mit r multiplicirt werden, im Nenner aber wird r statt 1 gesetzt; und $1 - \tan \alpha^2$ ist nur richtig, wenn r^2 statt 1 gesetzt wird (476). So ist $\frac{\operatorname{cosec} \beta \cdot \sec \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \cot \alpha}$ — der Nenner richtig, wenn statt 1 wieder r^2 gesetzt wird, aber, daß überhaupt der Bruch eine Linie bedeute, muß der Zähler noch mit r multiplicirt werden. Alles dieses wird deutlich aus der Lehre von Dimensionen.

§. 58. Exempel. Von Berechnung einiger Sinus und Cosinus, den Sinus totus = 1 gesetzt.

I. Der Sinus $30° = \frac{1}{2}$. 0,5000000; und $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2} . 1{,}4142135 = 0{,}7071068 \ldots$ ferner $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{(5)} - 1)$; und $\sqrt{5} = 2{,}2360679$ und $\frac{1}{4}(\sqrt{(5)} - 1) = \frac{1{,}2360679}{4}$ $= 0{,}3090169 \ldots$ wofür man 0,3090170 setzen kann.

II. Wegen (Trig. 21, III) hat man auch $\sin 30° = \sin 150° = + \cos 60° = - \sin 210°$ u.s.w. ferner $\sin 45° = \sin 135° = + \cos 45° = - \sin 225°$ und $\sin 18° = \sin 162° = + \cos 72° = - \sin 198°$ u.s.w.

III. Nach (Trig. 57) ist $\sin 15° = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 30°}{2}\right)}$;

aber

aber $\cos 30° = \sqrt{(1-\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}86602540378443$

folglich ist $\sin 15° = \sqrt{\left(\frac{0{,}13397459621567}{2}\right)}$

Man multiplicire Zähler und Nenner mit 2, um den Nenner rational zu haben, so $\sin 15° = \sqrt{\frac{0{,}26794919243114}{2}} = 0{,}2588190$. Dieses giebt auch $\sin 165°$; auch $\cos 75°$ u. s. w.

§. 59. Anmerk. I. Diese wenige Rechnungen scheinen mir hinlänglich, das in (Trig. 47) zu Anfang Gesagte zu erläutern. Man kann sich leicht die große Manigfaltigkeit denken, welche die Formeln aus $\sin\alpha$ und $\sin\beta$; ferner die, aus $\sin\gamma$ und $\sin\alpha$ geben; denn man erhält hieraus $\sin(\alpha+\beta)$; $\sin 2(\alpha+\beta)$; $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; $\sin(\gamma-\alpha)$; $\sin 2(\gamma-\alpha)$ $\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)$ und nun können immer die Verbindungen manigfaltiger werden. Die Manigfaltigkeit hat Hr. Lämpe in Briefen über verschiedene Gegenstände aus der Mathematik, sehr gut auseinander gesetzt; sein Vortrag ist gewiß jedem Anfänger verständlich.

II. Bei Berechnungen der Tafeln zeigte es sich bald, daß bei ein Paar Bögen, deren Unterschied nur einige Minuten beträgt, sich die Unterschiede der Sinus, wie die Unterschiede der Bögen verhalten; und auch diese Methode wurde bei Berechnung der Tafeln gebraucht, nachdem man schon viele Sinus nach den vorigen Exempeln berechnet hatte.

III. Weil in den wenigsten Tafeln die Sinus von Sekunde zu Sekunde berechnet sind; so muß man sogar oft seine Zuflucht zu der Methode in (II) nehmen; dieses erläutern folgende zwei Exempel:

I) Man hat in einer trigonometrischen Rechnung als Facit für einen Sinus die Zahl 0,7643085 herausbekommen; und man sucht den Winkel, oder Bogen für diesen Sinus. In den Tafeln steht sin 49° 50′ = 0,7641714, welcher kleiner, als der gefundene ist; aber sin 49° 51′ = 0,7643590, welcher zu groß ist; daher rechnet man so: Der Unterschied der beiden Tafelsinus ist 1876; der Unterschied der Bögen, zu welchen beide Tafelsinus gehören, ist 60″; und der Unterschied zwischen dem kleinern Tafelsinus, und dem gefundenen ist 1361; daher hat man 1876 : 1371 = 60″ : x″ und x = 43″; daher gehört der Sinus 0,7643085 zu einem Winkel von 49° 50′ 43″.

IV. Man hat einen Winkel von 36° 24′ 45″; und sucht die Zahl für seinen Sinus. Der Tafelsinus von 36° 24′ ist = 0,5934189 und der von 36° 25′ ist = 0,5936530; daher ihr Unterschied = 2341. Nun übertrift der große Bogen in den Tafeln den kleinen um 60″; aber der gegebene übertrift den kleinen um 45″; es fragt sich, wieviel der Sinus des gegebenen Bogens den Sinus des kleinern Tafelbogens übertreffe; daher setzt man 60″ : 45″ = 2341 : y; und y = 1855; daher ist sin 36° 24′ 45″ = 0,5934189 + 1855 = 0,5936044.

V. Man bedient sich aber gewöhnlich bei trigonometrischen Rechnungen der Logarithmen; und da kann man entweder solche Logarithmen herausbringen, die nicht genau so in den Tafeln stehen; oder auch Winkel, deren Sinuslogarithmen man erst genau finden muß. Z. B. Man hat den Logarithmen 9,5383672 für den Sinus eines Bogen oder Winkels in einer Rechnung herausgebracht. Sucht man diesen Logarithme bei den Sinuslogarithmen in den Tafeln, so findet man ihn so nicht; man findet log sin 20° 12′ = 9,5381943; und log sin 20° 13′ = 9,5385375. Die logarithmische Differenz dieser beiden Tafellogarithmen ist 3432; der Unterschied ihrer Winkel ist 60″. Nun ist der Unterschied des kleinern Tafellogarithme, und des in Rechnung gefundenen = 1729; daher hat man 3432 : 1729

(r =

$= 60'' : x''$; und $x = 30,2''$; daher ist der Winkel, zu dessen Sinus der obige Logarithme gehört, $= 20° \, 12' 30,2''$

VI. Man soll den Logarithme für den Sinus des Winkel $8° \, 36' 40''$ finden. In den Tafeln findet man $\log \sin 8° \, 36' = 9,1747439$; und $\log \sin 8° \, 37 = 9,1755784$. Die Differenz dieser beiden Logarithmen ist 8345; die Winkel in den Tafeln sind um $60''$ verschieden, und der oben angegebene Winkel ist vom kleinern um $40'$ verschieden; daher hat man $60'' : 40'' = 8345 : Z$ und $Z = 5536$; daher ist $\log \sin 8° \, 36'' 40'' = 9,1747439 + 5563 = 9,1753002$. Diese beiden Exempel sind nach der Weisung (Rechenk. 413 und 415) berechnet worden.

VII. Es versteht sich von selbst, daß diese Exempel sowohl auf die Zahlen, als Logarithmen der andern trigonometrischen Linien können angewandt werden.

§. 60. Einige Exempel von Berechnung der Tangenten.

Wenn in der 185ten Figur der Winkel BCS $= 45°$ ist, so ist auch BSC $= 45°$ (108, II), und so ist △ SCB gleichschenklicht (62), und BS $=$ CB; daher ist die Tangente eines Bogens von $45°$ gleich dem Halbmesser. Diese Tangente ist allein rational. Die Cotangente von $45°$ ist aber auch nothwendig in diesem Falle der Tangente gleich.

II. $\text{Sec } 45° = \sqrt{(1 + \text{tang}^2)} = \sqrt{2}$.

III. Daher ist $\text{tang } 22° 30' = \sqrt{(2)} - 1$ (Trig. 57) $= 1,4142136 - 1 = 0,4142136$.

IV. Hat man einmal für die Bögen von jeder Zahl Grade, die Sinus und Cosinus, so wird es dann auch leicht nach (Trig. 49), die übrigen Funktionslinien zu berechnen. Die Verbindungen der Formeln geschieht dann bei Berechnung der Tangen-

gen-

genten, Cotangenten, Sekanten, und Cosekanten nach eben dem Mase, wie in (Trig. 59, I).

V. Es sey in (Trig. 54) $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$; also tang $\beta = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, welcher Ausdruck bequemer ist, als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (Rechenk. 216 Anmerk.); auf diese Art hat man tang $(45^\circ + 30^\circ) =$ tang $75^\circ =$

$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} \text{ (Trig. 54)} = \frac{(3+\sqrt{3}):3}{(3-\sqrt{3}):3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

man multiplicire Zähler und Nenner mit $3+\sqrt{3}$; so wird der Nenner $= 9 - 3 = 6$ (Rechenk. 182, II) und der Zähler ist $9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 3$ (Rechenk 196); daher der Bruch oder tang $75^\circ = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} =$

3,732050807 ...

VI. Tang $(45^\circ - 30^\circ) =$ tang $15^\circ =$

$$\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(3-\sqrt{3}):3}{(3+\sqrt{3}):3} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}};$$ und

De
gefu Zähler und Nenner mit $3 - \sqrt{3}$ multiplicirt,
fr

so

so wird aus dem Bruche $\frac{9-6\sqrt{3}+3}{6} = 2-\sqrt{3}$ $= 0{,}267949193 = \text{tang } 15^\circ$.

VII. $\text{Tang } 60 = \text{tang } 2 \,.\, 30^\circ = \frac{(2 \,.\, \sqrt{3}):3}{1-\frac{3}{9}}$ $= \frac{(2 \,.\, \sqrt{3}):3}{(9-3):9} = \frac{(2\sqrt{3}):3}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$; folglich ist

VIII. $\text{Sec } 60^\circ = \sqrt{((\text{tang } 60^\circ)^2 + 1)} = \sqrt{(3+1)} = \sqrt{4} = 2$; diese Sekante ist auch allein rational; sie ist so groß, als der Durchmesser.

Anmerk. In den Tafeln sind die Zahlen für die trigonometrischen Funktionen nur in 7 Dezimalstellen gegeben; und da ist, wenn man den Sinus von 30°, oder cos 60°, und die Tangente von 45° ausnimmt, die letzte Ziffer nicht genau richtig, weil diese Zahlen sämtlich irrationale Wurzelzahlen sind. Diese Unrichtigkeit für die letzte Ziffer würde zwar auch bleiben, wenn die Zahlen in mehr Dezimalstellen angegeben wären; allein man hätte doch die Zahlen dann schärfer (Rechenk. 214). Man hat daher auch Tafeln, worinn die Funktonszahlen weiter gehen. Beim gewöhnlichen Gebrauche reichen sowohl die Zahlen, als Logarithmen der gemeinen Tafeln zu; allein wenn man schärfer rechnen will, (und in der Astronomie fodert man größere Schärfe) so ist es nöthig, auch noch andere Tafeln zu kennen. Hierzu hat Hr. Hofr. Kästner die ganze vierte Abhandlung in seiner zweiten astronomischen Sammlung bestimmt; sie besteht aus 83 Seiten, und enthält wohl alles, was man über diesen Gegenstand zu wissen, verlangen kann.

An=

Anmerk. Ich füge hier keine Beschreibung von Einrichtung und Gebrauche der trigonometrischen Tafeln bei; weil sich dieses sehr leicht bei Vorzeigung der Tafeln selbst thun läßt. Ich merke nur noch an, daß auch hier die Vegaischen, theils wegen ihrer, zum gemeinen Gebrauche ganz zureichenden Vollständigkeit, theils wegen ihrer Correktheit und wegen dem sehr niedrigen Preise zu empfehlen sind.

Anwendungen zur Berechnung der Seiten und Winkel geradlinigter Dreiecke, Parallelogramme, und regulärer Vielecke.

§. 61. Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC fig. 190 verhalten sich die Seiten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, wo jedoch diese Sinus von einerlei Halbmesser müßen angenommen werden.

Beweis. Um jedes Dreieck kann ein Kreis AbCaBc beschrieben werden (151); und die drei Seiten sind die Sennen der zugehörigen Bögen. So ist $\frac{1}{2}$ Senne CB = sin $\frac{1}{2}$ Bogen CaB (Trig. 9) und der $\frac{1}{2}$ Bogen ist das Mas des gegenüberliegenden Winkels A (123); folglich ist sin $\frac{1}{2}$ Bogen CaB = sin A = $\frac{1}{2}$ CB; auf die nämliche Art folgt; sin $\frac{1}{2}$ Bogen AbC = sin B = $\frac{1}{2}$ AC; und sin $\frac{1}{2}$ Bogen AcB = sin C = $\frac{1}{2}$ AB. Nun ist $\frac{1}{2}$ CB : $\frac{1}{2}$ AC = sin A : sin B = CB : AC; eben so ist $\frac{1}{2}$ CB : $\frac{1}{2}$ AB = sin A : sin C = CB : AB; daher auch AC : AB = sin B : sin C.

Anmerk. Um der Sache bei Dreiecken eine bequemere Übersicht zu geben, werde ich in der Folge die Winkel mit großen Buchstaben, und die jedesmalige Seite, die dem Winkel gegenüber liegt, mit dem gleichnamigen kleinen Buchstaben benennen.

§. 62.

§. 62. Lehrsatz. I. In jedem rechtwinklichten Dreiecke ABC fig 191 verhält sich der Kathet a zum Kathet b, wie cos B zum sin B, d. i. der am spitzen Winkel anliegende Kathet wird der Cosinus; der gegenüberliegende aber der Sinus dieses Winkels; wenn die Hypothenuse der Halbmesser ist.

II. Auch ist b : a = tang B : sin tot.

III. a : b = tang A : sin tot.

Beweis. I. Man beschreibe mit der Hypothenuse BA den Bogen AD; aus dem Punkte B, so ist AC der Sinus, und CB der Cosinus des Winkels B (Trig. 8). Würde man mit der Hypothenuse aus A den Bogen BE beschreiben, so ist aus dem nämlichen Grunde BC der Sinus des Winkels A; AC dessen Cosinus; folglich ist (I) unter der angegebenen Allgemeinheit erwiesen. Aber die Funktionen a und b setzen den Halbmesser AB zum voraus. Ich will daher AC und BC den natürlichen Sinus und Cosinus nennen, und mit sin nat, cos nat bezeichnen. Die Sinus und Cosinus in den Tafeln mit sin tab, cos tab u. s. w. bezeichnen; so ist b : a = sin nat B : cos nat B; aber sin nat B : sin tab = AB : r (wo r den Sinus totus der Tafeln bedeutet); auch so ist cos nat B : cos tab B = AB : r; folglich sin nat B : sin tab B = cos nat B : cos tab B; oder sin nat B : cos nat B = sin tab B : cos tab B = b : a.

II. Beschreibt man mit dem Kathet BC aus dem Punkte B den Bogen Cm; so ist AC die Tangente des Winkels B; so wie alsdann BA dessen Sekante wird (Trig. 24); daher ist die Proportion in (II) richtig (Trig. 26); und wegen den Gründen

in

in (I) hat man auch hier $b:a = \text{tang nat } B : BC = \text{tang tab } B : r$.

III. Beschreibt man aber mit AC aus dem Punkte A den Bogen Cn; so wird CB die Tangente von A; und man hat $a:b = \text{tang nat } A : BC = \text{tang tab } A : r$.

Anmerk. Wenn in der Folge bei Rechnungen r als sin tot gebraucht wird, so sind die Funktionen so zu verstehen, wie sie sich in den Tafeln finden.

§. 63. Zusatz. Daß das rechtwinklichte Dreieck unter dem allgemeinen Satze (Trig. 61) mit Begriffen sey, ist für sich klar.

§. 64. Zusatz. Es bedeute sin A, sin B u. s. w. die Funktionen für den Halbmesser = 1; so ist $1 : AB = \sin B : AC$ (Trig. 48); folglich $AC = b = AB \cdot \sin B$; $BC = a = AB \cdot \cos B$ (Rechenk. 110). Eben so ist $1 : BC = \text{tang } B : AC$; und $AC = BC \cdot \text{tang } B$; eben so ist $BC = AC \cdot \text{tang } A$. Aus diesen Gleichungen hat man ferner

$$\sin B = \frac{AC}{AB};\ \cos B = \frac{BC}{AB};\ \text{tang } B = \frac{AC}{BC}$$

u. s. w.

§. 65. Zusatz. Die zween spitzen Winkel im rechtwinklichten Dreiecke sind sich wechselweise Ergänzung zu 90° (Geom. 108, II); heißen sie A, B, so ist $\sin A = \cos B$; und $\text{tang } A = \cot B$; und so umgekehrt $\sin B = \cos A$ u. s. w.

§. 66. Zusatz. Weil die drei Winkel eines Dreieckes zusammen 180° haben (Geom. 104), so ist jedesmal $\sin A = \sin (B + C)$ (Trig. 21, III).

Eben

Eben so sin B = sin (A + C) und sin C = (A + B), und so von den übrigen Funktionen, wobei nur jedesmal die positive oder negative Lage noch zu bemerken ist.

§. 67. Aufgabe. In einem rechtwinklichten Dreiecke ACB fig. 191 ist bekannt die Hypothenuse und ein Kathet; man soll die zween spitzen Winkel finden.

Auflösung. Man hat c : a = r : sin tab A; folglich sin tab A = $\frac{a \cdot r}{c}$; und weil ∢ B = 90° — ∢ A (Geom. 106); so hat man zugleich B. Hätte man b als gegeben angesehen, so ist $\frac{b \cdot r}{c}$ = sin tab B. Auch könnte man setzen sin tab A = cos tab B (Trig. 65), woraus man zugleich B findet.

Exempel. c = 96″; a = 5′; daher setze man a = 50″, weil die zwei Glieder im ersten Verhältnisse gleichartig seyn müssen; und so ist $\frac{r \cdot a}{c} = \frac{10000000 \cdot 50}{96}$ = 5208333, und so findet man den Winkel A = 31°23′ + Theile einer Minute; weil eigentlich 5207613 = sin 31°23′ ist. Man kann hier nach (Trig. 59 III) rechnen, um von dem Winkel A auch noch die Sekunden zu haben, die ihm über die 23 Minuten zu kommen. Der Winkel B ist demnach = 58°37 — Theilen der Minute.

Die Rechnung in Logarithmen.

Man hat log sin tab A = log r + log a — log c

$\log \text{tab } r = 10$

$\log a = 1,6989700$

$\log r + \log a = 11,6989700$

$\log c = 1,9822712$ abgezogen

$\log \text{tab} \sin A = 9,7166988.$

Dieser Log. gehört zwar zunächst für den Sinus des Winkels 31°23′; allein der Logarithme in den Tafeln für 31°,23′ ist eigentlich 9,7166387; und log sin 31°,24 = 9,7168458. Man kann auch hier die Rechnung nach (Trig. 59, IV) schärfer führen.

§. 68. Zusatz. Wäre c und a gegeben, so findet sich zwar $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$; allein ist ein spitzer Winkel, nebst einem Katheten und Hypothenuse gegeben, so kann man den andern Kathet auch trigonometrisch finden; denn man hat, um b zu finden; $r : (\sin B = \cos A) = c : b$. Daher $b = \frac{c . \sin B}{r} = \frac{c . \cos A}{r}$. Auch ist $r : (\sin A = \cos B) = c : a$; und hieraus $a = \frac{c . \sin A}{r} = \frac{c . \cos B}{r}$.

Exempel. Es sey, wie oben A 31°,23′; B = 58°,37′; c = 96″, so ist die Rechnung in Logarithmen:

log

$$\log c = 1{,}9822712$$
$$\log \sin A = 9{,}7166387$$
$$\log c + \log \sin A = 11{,}6989099$$
$$\log r = 10{,}$$ abgezogen

$\log a = 1{,}6989099$; und dieser Logarithme unter der Kennziffer 5 in den größern Tafeln gehört zu der Zahl 49,993; daher wäre die Zahl für den gefundenen Logarithmen 4,9993; oben war $a = 50''$, aber in dieser Rechnung ist A etwas zu klein, wie schon oben erinnert wurde.

Die Rechnung für b zu finden, wird in Logarithmen so geführt:

$$\log c = 1{,}9822712$$
$$\log \sin B = 9{,}9313065$$
$$\log c + \log \sin B = 11{,}9135777$$
$$\log r = 10$$ abgezogen

$\log b = 1{,}9135777$. Diesen Logar. wie oben unter der Kennziffer 5 aufgesucht, gehört er zur Zahl 81954 + noch einem Theile, den man nach (Rechenk. 413) finden könnte; daher gehört der Logarithme nach der obigen Kennziffer zu der Zahl 81,954 +.

Die Formel $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$ giebt $b = 81''$, 9512... Der Unterschied zwischen dieser Zahl und der obigen kömmt daher, weil B etwas zu groß ist angenommen, wie wieder aus (§. 67) erhellet.

§. 69. Aufgabe. Aus den gegebenen Katheten eines rechtwinklichten Dreieckes die spitzen Winkel, nebst der Hypothenuse zu finden.

Auflösung. Aus (Trig. 62) hat man a : b $= r : \tan B$; oder $\tan B = \frac{r.b}{a}$; eben so ist $\tan A = \frac{r.a}{b}$. Weil für a, als Halbmesser angenommen, AB die natürliche Sekante des Winkels B ist; und wenn b als Halbmesser angesehen wird, AB die natürliche Sekante von A wird, so hat man $r : \sec A = b : (AB = c)$; oder auch $r : \sec B = a : (AB = c)$; daher $c = \frac{a.\sec B}{r}$ $= \frac{b.\sec A}{r}$. Allein nicht in allen Tafeln findet man die Sekanten; daher kann man setzen $c = \frac{a.r}{\cos B}$ $= \frac{b.r}{\cos A}$; weil $\frac{r^2}{\cos} = \sec$. (Trig. 26).

Exempel. a = 50″, b = 81″, 9512 und die Logarithmen gebraucht, giebt log r + log a — log b = log tang A

log r = 10
log a = 1,6989700

log r + log a = 11,6989700
log b = 1,9135553 abgezogen

log tang A = 9,7854147; dieser gehört zu tang 31°23 +; weil der Logarithme zu 31°, 23′ in den Tafeln ist = 9,7853323; aus dem obigen er=

erhellet, daß hier b etwas kleiner, als in der dortigen Rechnung angenommen ist; dieses giebt nothwendig den Winkel A wieder größer. Auf die Art wird die Formel $\frac{r.b}{a}$ für die Tangente B berechnet.

Um c zu finden, setze man; $B = 58°37'$, und rechne folgender Gestalt:

$$\log r + \log a = 11,6989700$$
$$\log \cos B = 9,7166387 \text{ abgezogen}$$
$$\log c = 1,9823313$$ gehört zunächst zu der Zahl 96,013+. Auch hier ist wieder zu merken, daß c etwas zu groß kommen mußte, weil cos B, oder sin A etwas zu klein ist.

§. 70. Zusatz. Ist nur ein Kathet, z. B. a und ein schiefer Winkel A gegeben, so lassen sich doch hieraus die übrigen Dinge finden. Denn wenn A bekannt ist, so weiß man B, den Ergänzungswinkel von A; und man hat:

I. $r : (\tan B = \cot A) = a : b$, oder

II. $\cos B : \sin B = a : b$; von beiden Proportionen, kann man eine, welche man will, brauchen, um b zu finden. Weil auch $\cos B = \sin A$; so ist in (II) $\sin A : \sin B = a : b$; dieses ist der Satz (Trig. 61).

III. $r : \sec B = a : c$; hieraus wird c gefunden, weil $\frac{\sec B . a}{r} = c = \frac{a . r}{\cos B} = \frac{a . r}{\sin A}$.

§. 71. Aufgabe. Im gleichschenklichten $\triangle$ ABC fig. 192 ist eine Seite, und ein Winkel gegeben, man soll die übrigen Stücke, nebst der senkrechten CD finden.

Auflösung. Wenn ein Winkel bekannt ist, so weiß man die übrigen zwei. Es sey A bekannt, so hat man B; und $180° - 2A = C$.

Es sey ein Schenkel im Dreie ke gegeben, so hat man, weil CD die Grundlinie senkrecht halbirt (Geom. 86) $\sec A : r = a : \frac{1}{2} c$, und $\frac{r \cdot a}{\sec A} = \frac{1}{2} c = \frac{a \cdot \cos A}{r} = \frac{a \cdot \sin \frac{1}{2} C}{r}$. Wollte man unmittelbar aus a und A, die senkrechte CD finden, so setzt man $\sec \frac{1}{2} C : r = a : CD$; und hieraus wird $CD = \frac{a \cdot r}{\sec \frac{1}{2} C} = \frac{a \cdot \cos \frac{1}{2} C}{r}$.

§. 72. Zusatz. Sind die drei Seiten des gleichschenklichten Dreieckes gegeben, so kann man setzen $a : \frac{1}{2} c = r : (\cos A = \cos B = \sin \frac{1}{2} C)$ und $\frac{\frac{1}{2} c \cdot r}{a} = \cos A = \sin \frac{1}{2} C$.

§. 73. Aufgabe. Aus zwei gegeben Winkeln und einer Seite eines Dreieckes das übrige zu finden.

Auflösung. Den dritten Winkel zu finden, lehrt (Geom. 106). Die Seiten zu finden, sey a gegeben, und man hat wegen (Trig. 61) $\sin A : \sin B$

=

$= a : b$; daher $b = \frac{a . \sin B}{\sin A}$; auch $\sin A : \sin C$
$= a : c$; und $c = \frac{\sin C . a}{\sin A}$.

Exempel. $a = 38$ Ruthen; $\measuredangle A = 84°$; $\measuredangle B = 30°48'$; folglich $\measuredangle C = 65°12'$

$$\log a = 1,5797836$$
$$\log \sin B = 9,7093063$$
$$\log a + \log \sin B = 11,289099$$
$$\log \sin A = 9,9976143 \text{ abgezogen}$$
$$\log b = 1,2914756$$

gehört zunächst zu der Zahl 19,565; oder b = 19 Ruthen und 5 Dez. Fuß, 6 Dez. Zoll, 5 Dez. Linien. Für c hat man

$$\log a = 1,5797836$$
$$\log \sin C = 9,9579794$$
$$\log a + \log \sin C = 11,5377630$$
$$\log \sin A = 9,9976143 \text{ abgezogen}$$
$$\log c = 1,5401487$$

gehört zu der Zahl 34,685; oder 34 R. 6 F. 9 Z. 5 L.

§. 74. Aufgabe. Aus zwo Seiten und einem Winkel, der nicht von diesen Seiten eingeschlossen wird, die übrigen Stücke des Dreieckes zu finden.

Auflösung. I. Die gegebenen Seiten sollen a und b, und der Winkel A seyn.

Man hat $a : b = \sin A : \sin B$; daher $\log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$.

Exempel. a = 40 Ruthen, 5 Fuß, oder a = 405 F.; b = 212'; $\sphericalangle$ A = 108°; daher sin A = sin 180° — 108° = sin 72°

$$\begin{array}{rl} \log b = & 2,3263359 \\ \log \sin A = & 9,9782063 \\ \hline \log b + \log \sin A = & 12,3045422 \\ \log a = & 2,6074550 \text{ abgezogen} \\ \hline \log \sin B = & 9,6970872 \end{array}$$

giebt den Winkel B = 29°51'+. Ich suche durch Proportionaltheile die Sekunden.

$$\begin{array}{rl} \log \sin 29°51' = & 9,6969947 \\ \log \sin 29°52' = & 9,6972148 \\ \hline \text{Unterschied} = & 2201 \end{array}$$

Der Unterschied des gefundenen log sin B, und des von 29°,51' ist = 925; daher nach (Trig. 59, V) 2201 : 925 = 60'' : 25,2''; daher ist B = 29°51'25,2''. Hieraus nun ist $\sphericalangle$ C = 42°8'34,8''. Um die Seite c zu finden, mußte man erst den Winkel C gefunden haben; und man hat nun sin A : sin C = a : c; daher log a + log sin C — log sin A = log c

$$\begin{array}{rl} \log \sin C = & 9,8267925 \text{ durch Proport. Theile gefunden} \\ \log a = & 2,6074550 \\ \hline \log \sin C + \log a = & 12,4342475 \\ \log \sin A = & 9,9782063 \text{ abgezogen} \\ \hline \log c = & 2,4560412 \end{array}$$

kömmt der Zahl 285,79 am nächsten, oder c ist = 285 Fuße, 7 Zolle, 9 Linien

An=

Anmerk. Daß in der vorigen Aufgabe (73) keine Zweideutigkeit, in Rücksicht der zu findenden Dinge, aus den gegebenen, statt habe, erhellet aus (Trig. 3). Aber auch in der nächsten Aufgabe, wo der stumpfe Winkel angegeben ist, hat noch keine Zweideutigkeit statt, dieses erhellet aus (Trig. 3, III). Eine Zweideutigkeit bei dieser Aufgabe entsteht, wenn der gegebene Winkel spitz ist; daher soll noch ein Exempel zu dieser Absicht berechnet werden.

II. Es sey im Dreiecke ACB fig. 183 gegeben AC = b = 36 Ruthen; BC = a = 28 Ruthen; nebst dem Winkel A, welcher spitz, und 41° seyn soll. Man sucht den Winkel CBA.

Hier ist, wie oben a : b = sin A : sin B; folglich log sin A + log b − log a = log sin B

$$\log \sin A = 9{,}8169429$$
$$\log b = 1{,}5563025$$
$$\log \sin A + \log b = 11{,}3732454$$
$$\log a = 1{,}4471580 \text{ abgezogen}$$
$$\log \sin B = 9{,}9260874$$

giebt den Winkel CBA = ~~56° 53'~~ +''.
57° 0'

Anmerk. Weiß man nicht, daß der Winkel B stumpf ist, (in welchem Falle man hier den Sinus des Winkels CBD hat), so kann auch das Gefundene für den Winkel CDA gelten; und man hätte so das Dreieck ACD in Betracht gezogen, welches das vorgegebene nicht ist.

Ist aber CBA stumpf, so ist er = 123° 7'—''. Man hat aber bei einem vorgegebenen Dreiecke doch Umstände, aus welchen man schon nach dem blosen Augenmase, oft auch aus noch gemessenen andern Dingen leicht erkennt, ob ein Winkel, und

 wel-

welcher stumpf ist. So ist ∢ CBD = ∢ A + ACB (Geom. 105) das gäbe den Winkel ACB nach den obigen Angaben sehr spitz, indem er nur $15^\circ 53' + ''$ betrüge; daher müßte AB sehr klein seyn (Geom. 70). Wenn daher irgend bekannt wäre, daß AB kleiner, als eine der beiden übrigen Seiten, und zwar viel kleiner, als AC sey, so ließ sich schon schließen, daß bei B ein stumpfer Winkel sey. Vielleicht ließ sich auch schon, wenn das Dreieck zu übersehen ist, aus dem blosen Anblicke des Winkels bei B erkennen, ob er stumpf, oder spitz sey.

Liegt das Dreieck in Verbindung mit mehreren andern Dreiecken, wie das bei praktischen Erdmessungen gewöhnlich, der Fall ist, so hat man oft Gelegenheit, aus den anliegenden Dingen der andern Dreiecke die wahre Gestalt eines solchen Winkels zu erkennen.

Anmerk. Bei der nächstvorigen Aufgabe kann aber auch beim zweiten Falle der merkwürdige Umstand eintretten, daß die Größe der gegebenen Stücke kein Dreieck bilden können. Die Figur zeigt es schon, daß wenn BC kleiner angenommen würde, als ein Perpendikel aus C auf AD, diese BC die gedachte AD nicht erreichen werde. Wie sich dieses in der Rechnung zeige, wird folgendes Beispiel lehren. Es sey alles wie oben, nur BC = 23; so ist

$$\begin{array}{rl} \log \sin A + \log b = & 11{,}3732454 \\ \log a = & 1{,}3617278 \text{ abgezogen} \\ \hline \end{array}$$

giebt $\log \sin B = 10{,}0115176$. Dieses gäbe einen Sinus, der größer, als der sin tot wäre, welcher Sinus unmöglich ist. So lehrt die Rechnung, daß aus ungereimten Voraussetzungen auch etwas Ungereimtes zur Folge erhalten werde.

Es

Es bleibe $a = 28$, $b = 36$; aber A sey = $51^\circ 4'$, so ist

$$\begin{array}{rl} \log\sin A = & 9,8909113 \\ \log b = & 1,5563025 \\ \hline \log\sin A + \log b = & 11,4472138 \\ \log b = & 1,4471580 \end{array}$$ abgezogen

$$\log \sin B = 10,0000558$$ eben so, wie oben, ungereimt.

Man setze $A = 51^\circ 3' 26'' 2'''$; so ist

$$\begin{array}{rl} \log\sin A = & 9,8908555 \\ \log b = & 1,5563025 \\ \hline \log\sin A + \log b = & 11,4471580 \\ \log a = & 1,4471580 \end{array}$$ abgezogen

$$\log \sin B = 10,0000000;$$ folglich ist B ein rechter Winkel.

Hieraus folgt, daß wenn a und b die obige bestimmte Länge haben sollen, A nicht größer, als $51^\circ 3' 26'' 2'''$ seyn darf. So ließ sich auch, wenn A und b gegeben sind, finden, wie groß a seyn müße, daß B ein rechter Winkel werde.

§. 75. Rechnungssatz. Wenn die Summe zwoer Zahlen $= S$, und ihre Differenz $= D$ bekannt ist; die große Zahl aber x, und die kleine y ist; so ist $x = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} D$; und $y = \frac{1}{2} S - \frac{1}{2} D$.

Bew. Aus (Rechenk. 25) hat man $x = y + D$; folglich ist $S = 2y + D$; daher $S - D = 2y$; oder $\frac{S - D}{2} = y$. Weil auch aus (Rechenk 26)

$y = x - D$; daher auch $S = 2x - D$; und hieraus $2x = S + D$; daher $x = \frac{S+D}{2}$. Der Satz heißt:

Wenn man die halbe Summe, und halbe Differenz zwoer Zahlen addirt, so giebt das die große Zahl; aber die halbe Differenz von der halben Summe subtrahirt, giebt die kleine Zahl.

Zusatz. Auch ist $\frac{1}{2}S - y = \frac{1}{2}D$; und $x - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}D$; auch $\frac{1}{2}D + y = \frac{1}{2}S$, $x - \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}S$.

§. 76. Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC fig. 194 verhält sich die Summe zwoer Seiten, die einen Winkel einschließen, zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Sum/ der beiden andern Winkel, zur Tangente ihrer halben Differenz.

Erster Beweis. Nach einer geometrischen Zeichnung. Es sey $\sphericalangle$ BAC der eingeschlossene Winkel, AB und AC die zwo Seiten. Man verlänge die größte Seite AC rückwärts, bis AS = AB werde; auch werde AT = AB; so ist SC = der Summe der beiden Seiten; TC aber ist das Stück, um welche die große Seite die kleine übertrift, oder TC ist die Differenz beider Seiten. $\sphericalangle$ SAB = $\sphericalangle$ ABC + $\sphericalangle$ ACB (Geom. 105) = $\sphericalangle$ ABT + $\sphericalangle$ ATB; aber $\sphericalangle$ ABT = $\sphericalangle$ ATB (Geom. 59); folglich ist SAB, oder die Summe der beiden Winkel = 2 $\sphericalangle$ ATB; folglich $\sphericalangle$ ATB, oder $\sphericalangle$ ABT = $\frac{1}{2}$ $\sphericalangle$ SAB.

Nun ist nach der Voraussetzung, daß AB < AC sey, auch $\sphericalangle$ C < $\sphericalangle$ B (Geom. 80). Wenn daher hier nach (Trig. 75) $\sphericalangle$ SAB = S; $\sphericalangle$ C = y;

und

und $\sphericalangle$ B = x setzt; so ist $x - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} D$ (das. Zus.); folglich $\sphericalangle$ B — $\sphericalangle$ ABT = TBC = dem halben Unterschiede der beiden Winkel des Dreieckes.

Man ziehe durch C die Linie CV parallel mit TB, bis sie die verlängte SB in V treffe; so ist $\sphericalangle$ TCV = $\sphericalangle$ ATB = $\sphericalangle$ ABT (Geom. 102, II); aber TCV — TCB = $\sphericalangle$ BCV. d. i. nach der Bezeichnung $\frac{1}{2} S - y = \frac{1}{2} D$; daher ist BCV die halbe Differenz der beiden Winkel. Wegen der Verzeichnung geht ein Kreis aus dem Punkte A, mit AB beschrieben durch die Punkte T, B, S; folglich ist $\sphericalangle$ SBT = 90° (Geom. 124) = $\sphericalangle$ SVC (Geom. 102, II). Nun sey mit CV als Halbmesser aus C ein Kreisbogen beschrieben, der das Mas des Winkels BCV und SCV werde; so ist offenbar SV die Tangente für den Winkel SCV; und BV ist die Tangente des Winkels BCV. Weil TB; CV parallel sind, so ist SC : TC = SV : BV (Geom. 204); diese Proportion ist aber der in Worten ausgedruckte Satz.

Zweiter Beweis. Durch Rechnung. Im Dreiecke heiße der Winkel $A = \alpha$; $B = \beta$; $C = \gamma$; so ist $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta \cdot \cos\gamma + \sin\gamma \cdot \cos\beta$ und $\sin(\beta - \gamma) = \sin\beta \cdot \cos\gamma - \sin\gamma \cdot \cos\beta$.

Man mache die Summe M, und die Differenz N der beiden Gleichungen, so ist

$$M = \sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma) = 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma.$$
$$N = \sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma) = 2 \cdot \sin\gamma \cdot \cos\beta.$$

Es heiße $\beta + \gamma = S$; $\beta - \gamma = D$; so ist $\beta = \frac{1}{2}(S + D)$; $\gamma = \frac{1}{2}(S - D)$ (Trig. 75);

folg=

folglich ist

$$M = \sin S + \sin D = 2 . \sin \tfrac{1}{2}(S+D) . \cos \tfrac{1}{2}(S-D)$$
$$N = \sin S - \sin D = 2 . \sin \tfrac{1}{2}(S-D) . \cos \tfrac{1}{2}(S+D)$$

und $\frac{M}{N} = \frac{\sin S + \sin D}{\sin S - \sin D} = \frac{\sin \frac{1}{2}(S+D) . \cos \frac{1}{2}(S-D)}{\sin \frac{1}{2}(S-D) . \cos \frac{1}{2}(S+D)}$

$= \frac{\sin \frac{1}{2}(S+D)}{\cos \frac{1}{2}(S+D)} \times \frac{\cos \frac{1}{2}(S-D)}{\sin \frac{1}{2}(S-D)}$; aber der erste Faktor ist $= \operatorname{tang} \frac{1}{2}(S+D)$; und der zweite ist $= \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(S-D)}$ (Trig 49); daher ist $\frac{M}{N}$ $= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(S+D)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(S-D)}$; das ist: $(\sin S + \sin D) : (\sin S - \sin D) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}(S+D) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(S-D)$. Diese Proportion heißt in Worten allgemein so: **Die Summe der Sinusse zweier Winkel verhält sich zur Differenz dieser Sinusse, wie sich verhält die Tangente der halben Summe beider Winkel, zur Tangente der halben Differenz der beiden Winkel.**

Im $\triangle ABC$ fig 194 ist $AC : AB = \sin B : \sin C$ (Trig. 61); folglich $AC + AB : AC - AB = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C$ (Rechenk. 353) $= \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+C) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-C)$, welches der Satz ist.

§. 77. **Aufgabe.** Aus zwo gegebenen Seiten eines Dreieckes, nebst dem, von ihnen eingeschlossenen Winkel, das übrige zu finden.

Erste

Erste Auflösung. Die größere Seite heiße a, die kleinere b, der Winkel C; die andern beiden gesuchten Winkel A und B (wo wieder A der größere seyn muß (Geom. 80); die gesuchte Seite c; so hat man nach dem vorigen Satze.

$$a+b : a-b = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) : \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Hier findet man, weil $\frac{1}{2}(A+B)$, und folglich ihre Tangente bekannt ist (Geom. 106, II) den Winkel der halben Differenz; daher erhält man

$$A = \tfrac{1}{2}(A+B) + \tfrac{1}{2}(A-B) \text{ und}$$
$$B = \tfrac{1}{2}(A+B) - \tfrac{1}{2}(A-B) \text{ (Trig. 75).}$$

Exempel. In der 194ten Figur sey $a = 405$; $b = 212$, $C = 42°8'34''$; so ist $A+B = 180° - (42°8'34'') = 137°51'26''$; und $\frac{1}{2}(A+B) = 68°55'43''$; die Rechnung in Logarithmen zu führen, suche ich log tang $68°55'43''$ durch Proportionaltheile, und finde:

$$\log\,\text{tang}\;68°55'43'' = 10{,}4142074$$
$$\log\,(a-b) = \;\;2{,}2855573$$
$$\log\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A+B) + \log(a-b) = 12{,}6997547$$
$$\log(a+b) = \;\;2{,}7902852$$
abgezogen
$$\log\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = 9{,}9094695$$

Diese Tangente gehört zu $39°4'+''$ durch Proportionaltheile gesucht, finde ich den Winkel $39°4'15''$. Dieses giebt den Winkel $A = 68° + 55' + 43'' + 39° + 4' + 15'' = 107°59'58''$.

In (Trig. 74, I Exemp.) war $A = 108°$, hier kömmt er um $2''$ kleiner; dieses mag wohl daher rühren, weil die Logarithmen in der letzten Stelle ge-

gewöhnlich kleine Unrichtigkeiten haben. Daher werden in astronomischen Rechnungen Logarithmen gebraucht, die auf mehr, als 7 Dezimalstellen berechnet sind. Hierdurch erhält man mehr Richtigkeit in den letztern Stellen der Logarithmen (Rechenkunst 411, V).

Um nun die Seite c zu finden, kann man sich genau an die Methode in (Trig. 74) halten.

Zweite Auflösung. Man lasse vom Endpunkte der kleinsten Seite auf die gegenüberliegende auch gegebene Seite ein Perpendikel; dieses trift entweder die gegenüberliegende Seite, oder nicht. Wenn in der 193ten Figur AB und AC gegeben sind, und A stumpf ist, so fällt das Perpendikel CE außerhalb des Dreieckes, und trift AB nicht; nur AB verlängt, wird mit CE zusammentreffen. Ist aber AB und BC, nebst B gegeben, so, daß B spitz ist, so wird das Perpendikel AD auf BC fallen. Der Grund dieser Lage vom Perpendikel ist, weil die kleinste Seite so immer die Hypothenuse ist.

Ist nun AB, AC nebst A gegeben; so hat man r:(sin A = sin CAE) = AC:CE; ferner r:cos A = AC:AE; folglich findet man aus beiden Proportionen CE und AE; und BA + AE = BE; und so ist nun im rechtwinklichten Dreiecke BEC der Winkel B zu finden (Trig. 69); und dann ist C = 180° — A — B.

Ist AB und BC, nebst B gegeben, und AD fällt innerhalb des Dreieckes; so hat man auch

$r : \sin B = AB : AD;$

und $r : \cos B = AB : BD;$

und $BC - DB = DC$; und so läßt sich auch, wie oben, aus DC und AD der Winkel C finden. Die Regel hieße in Worten so: Man suche zuerst, zu dem Sinus totus, dem Sinus des Winkels, und der kleinsten gegebenen Seite, die vierte Proportionalzahl; hernach zum Sinus totus, dem Cosinus des Winkels, und der kleinsten Seite noch eine vierte Proportionalzahl; diese letzte wird entweder zu der grössern gegebenen Seite addirt (wenn nämlich der gegebene Winkel stumpf war), oder davon subtrahirt (wenn nämlich der gegebene Winkel spitz war), um den Kathet zu einem rechtwinklichten Dreiecke zu haben. Die erste Proportionalzahl ist der andere Kathet in diesem rechtwinklichten Dreiecke; und der, diesem andern Kathet gegenüberliegende Winkel, der sich finden läßt, ist ein zweiter, und solcher Winkel im Dreiecke der der kleinsten angegebenen Seite gegenüber liegt; folglich allemal spitz. Diese zweite Auflösung ist aber immer weitläuftiger, als die erste.

§. 78. Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreieckes die Winkel zu finden.

Auflösung. I. Nach geometrischen Gründen. Man setzt: Die größte Seite des Dreieckes verhält sich zur Summe der beiden andern Seiten, wie die Differenz dieser beiden Seiten zu einer vierten Linie y. Diese Linie y von der größten Seite abgezogen, und den hier gebliebenen Rest halbirt, giebt eine Linie d; Nun setzt man abermal: Die

 klein-

kleinste Seite verhält sich zu d, wie der Sinus totus zu dem Cosinus des Winkels, welcher der zweit kleinsten Seite gegenüber liegt. Und weil man auf diese Art einen Winkel hat, so kann man nach (Trig. 74) die übrigen beiden finden.

Beweis. Das Dreieck sey ACB fig 195; und AB die gröste Seite in ihm. Mit der kleinsten Seite CB sey ein Kreis beschrieben, der die beiden andern Seiten nothwendig in Punkten, wie E und D schneidet.

Man verlänge AC bis G, so ist $AC + CB = AC + CG =$ der Summe der beiden kleinsten Seiten; und AE ihr Unterschied. Zieht man die Sennen ED und GB; so ist $\triangle AED \backsim \triangle AGB$; nur die Lage der Schenkel beider $\triangle\triangle$ die den $\angle A$ einschließen, verkehrt genommen. Denn $\angle EDB$ hat zu seinem Mase den halben Bogen EGB; und $\angle G$ hat zu seinem Mase den halben Bogen BDE (Geom. 123); und beide Bögen machen den ganzen Kreis aus; folglich $\angle EDB + \angle G = 180° = EDB + \angle EDA$ (Geom. 43); folglich $\angle G = \angle EDA$; und A liegt in beiden Dreiecken; daher $AB:(AG = AC + CB) = AE:AD$; folglich wird hieraus $AD = y$ bekannt. Aber $AB - AD = DB = d$; und das Perpendikel CF halbirt DB in F (Geom. 128). Nun ist $CB:FB = r:\cos B$; und diese Proportion ist die in der Auflösung zuletzt genannte; woraus der Winkel B gefunden wird.

Zweite Auflösung. Nach algebraischer Methode. Es sey $CB = a$; $AC = b$; $AB = c$; die Auflösung geht dahin, AF, oder BF zu finden; d. i. den Punkt F, wohin das Perpendikel

aus

aus B fällt. Es wird daher $FB = x$ gesucht; so ist $AF = c - x$.

Nun hat man $AC^2 - AF^2 = FC^2$; und $CB^2 - FB^2 = FC^2$ (Geom. 176), oder in den obigen Bezeichnungen die Gleichungen ausgedruckt $b^2 - (c-x)^2 = FC^2 = a^2 - x^2$; oder $b^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2$; daher, wenn man x^2 auf beiden Seiten wegläßt (Rechenk. 337, III, 2), hat man $b^2 - c^2 + 2cx = a^2$; oder $2cx = a^2 - b^2 + c^2$; aber $a^2 - b^2 = (a+b).(a-b)$ (Rechenk. 182, II); folglich $x = \frac{c^2 + (a+b).(a-b)}{2c}$ $= \frac{1}{2}c + \frac{(a+b).(a-b)}{2c}$. Wenn man die Proportion in der ersten Gleichung in den nämlichen Bezeichnungen ausdruckt, und den vorgeschriebenen Unterschied zwischen A B und A D sucht, so kömmt man auf die nämliche Gleichung wie hier. Nun ist hier, wie in der ersten Gleichung $\cos B = \frac{r.x}{a} = \frac{r}{a}.\frac{c^2 + (a+b).(a-b)}{2c}$.

Exempel. $a = 26$; $b = 45$; $c = 58$; so ist $a + b = 71$; $a - b = 19$; ich suche das y in der ersten Auflösung $58 : 71 = 19 : y$; und $y = 23,258+$; folglich $d = \frac{58 - 23,258}{2} = 17,371$.

Für die zweite Proportion ist log r + log 17,371 — log 26 = log cos B

$$\begin{aligned} \log r &= 10, \\ \log 17{,}371 &= 1{,}2398248 \\ \hline \log r + \log 17{,}371 &= 11{,}2398248 \\ \log 26 &= 1{,}4149733 \text{ abgezogen} \\ \hline \log \cos B &= 9{,}8248515 \text{ gehört zu} \end{aligned}$$

48°,4′,42″.

Um den Winkel A zu finden, setzt man b : a = sin B : sin A

$$\begin{aligned} \log a = \log 26 &= 1{,}4149733 \\ \log \sin B &= 9{,}8716073 \\ \hline \log a + \log \sin B &= 11{,}2865806 \\ \log b = \log 45 &= 1{,}6532125 \text{ abgezogen} \\ \hline \log \sin A &= 9{,}6333681 \text{ gehört zu} \end{aligned}$$

25°27′40″ +; folglich ist C = 180° — A — B 106°27′38″ —.

§. 79. Zusatz. Die Formel $\cos B = \frac{r \cdot x}{a}$ kann man leicht auf (Trig. 77) anwenden. Es sey nämlich CB = a; AB = c; nebst ∢ B gegeben; man sucht AC = b. Der Werth von x eingesetzt giebt $\frac{r \cdot (a^2 - b^2 + c^2)}{2 c} = a \cdot \cos B.$

Damit die Rechnung einfacher werde, sey r = 1; so ist $2 c \cdot a \cdot \cos B = a^2 - b^2 + c^2$; und $b^2 = a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos B + c^2$; woraus $b = \sqrt{(a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos B + c^2)}$ gefunden wird.

Es

Es sey $a = 26$; $a^2 = 676$

$c = 58$; $c^2 = 3364$

$\cos B = \cos 48^\circ 4' 42'' = 0{,}6682005$

$2 . c . a . \cos B = 2015{,}2927080$

$a^2 + c^2 - 2 . c . a . \cos B = 2024{,}7072920$ und hieraus die Wurzel giebt $b = 44{,}9969$.

Im vorigen Exempel war $b = 45$ der Unterschied ist also 0,0031; er kömmt vermuthlich daher, daß cos B etwa in der letzten Dezimalziffer etwas zu groß ist.

§. 80. Aufgabe. In einem Parallelogramm A B C D fig. 196 sind zwo anliegende Seiten AD; AB; und ein Winkel gegeben; man soll die beiden Diagonallinien AC und BD finden, die im Parallelogramm statt haben.

Auflösung. Der gegebene Winkel kann seyn, welcher es wolle; d. i., entweder der eingeschlossene A, oder der nebenliegende B; denn einer bestimmt den andern (Geom. 113); aber auch beide an einer Seite liegende Winkel sind $= 180^\circ$ (Geometrie 102, III). Es heiße der Winkel $A = \alpha$; der Winkel $B = \beta$, so ist $\cos \alpha = - \cos \beta$. Es sey $AD = f = BC$; und $AB = g = DC$; die Diagonale DB heiße a; so ist, vermöge der Formel (Trig. 79), $a^2 = f^2 + g^2 - 2 . f . g . \cos \alpha$ Und eben so ist $b^2 = AC^2 = f^2 + g^2 - 2 . f . g . \cos \beta$ $= f^2 + g^2 + 2 . f . g . \cos \alpha$. Wird aus der Zahl rechter Hand dieser Gleichungen die Wurzel ausgezogen, so giebt diese die Zahl für die Diagonale.

§. 81. Zusatz. Man versteht in den obigen Formeln offenbar den spitzen Winkel; und so heiße a die, dem gegebenen Winkel α gegenüberliegende Seite; b aber die in den Winkel einschneidende Diagonale; so sagt der Satz: Das Quadrat der, dem spitzen Winkel gegenüberliegenden Diagonale ist so groß, als der Unterschied, welcher herauskömmt, wenn man das doppelte Produkt aus den beiden Seiten, und Cosinus des Winkels, von der Summe der Quadrate beider anliegenden Seiten abzieht. Das Quadrat der einschneidenden Diagonale aber ist die Summe aus dem Quadrate beider Seiten, und dem obigen doppelten Produkte.

§. 82. Zusatz. $a^2 + b^2 = 2f^2 + 2g^2$

$$a^2 - b^2 = -4 f . g . \cos\alpha$$

oder $b^2 - a^2 = + 4 . f . g . \cos\alpha$

Diese Formeln lassen sich leicht in Worten ausdrucken, wenn man die obige Wortbenennung von a und b beibehält.

§. 83. Aufgabe. Den Ausschnitt und Abschnitt des Kreises, nach trigonometrischer Methode zu finden, oder die Aufgaben in (Geom. 263 und 264) trigonometrisch aufzulösen.

Auflösung. Der Winkel ACB fig. 99 heiße α; CA = CB heiße h; die Senne AB = s; das Perpendikel CE = p. Der Sinus totus werde = 1 gesetzt.

Das Dreieck CAB ist gleichschenklicht; man hat daher wegen (Trig. 71) $s = 2 . h . \sin \frac{1}{2}\alpha$; hieraus

aus wird $\frac{\frac{1}{2}s}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = h$. Aus dem angeführten (§ 71) hat man $p = h.\cos\frac{1}{2}\alpha$. Nun ist der Inhalt des $\triangle$ ACB $= \triangle = \frac{1}{2}p.s = \frac{1}{2}h.2h\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha = h^2.\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha$; aber $\sin\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$ (Trig. 56). Daher $\triangle = \frac{1}{2}h^2.\sin\alpha$.

Nun sey der Bogen nach (Geom. 263) $= \alpha$; aber α muß in Theilen des Halbmessers gegeben seyn, wie das dortige Exempel lehrt; so ist der Ausschnitt $= \frac{1}{2}h^2.\alpha$; denn das $\frac{ad}{4}$ in (263) verwandelt sich in $\frac{1}{n}P.\frac{h^2}{2}$ (262) wo $\frac{1}{n}P = \alpha$ ist. Der Abschnitt ist daher $\frac{1}{2}h^2.\alpha - \frac{1}{2}h^2.\sin\alpha = \frac{1}{2}h^2(\alpha - \sin\alpha)$

Exempel. $\alpha = 72°$; $h = 54'$; und so ist der Bogen $\alpha = 67'8584$ nach dortiger Berechnung, und für den dortigen Halbmesser $= 54'$ gesetzt; folglich für den Halbmesser $= 1$ wird der Bogen, wie er eigentlich hier gebraucht werden muß, so gefunden; Bogen 180° : Bogen 72° = 3,1415926 : 1,2566370.

Aber $\sin\alpha = 0,9510565$; daher $\alpha - \sin\alpha = 0,3055805$; und so findet sich der Abschnitt $= 445',5363690$, Quadratfuße, oder 4 Ruthen 45 Fuße, 53 Zolle 63 Linien, 69 Skrupel. Das $\triangle$ ABC ist $\frac{1}{2}(54')^2 \times 0,9510565 = 1386',6403770$ Quadratfuße, oder 13 Ruthen 86 Fuße u. s. w. Addirt man den Abschnitt und

das △, so erhält nach wie im Exempel (263) (nur nach dem dortigen verbesserten Druckfehler). Den Ausschnitt nach dieser Rech. 18°, 32′, 17″, 67‴, 46⁗ der Unterschied, um wieviel ihn diese Rechnung kleiner giebt, ist 23‴ 32⁗. Er rührt vermuthlich daher, weil die Zahl für $\sin \alpha$ in den Tafeln etwas zu klein ist.

§. 84. Zusatz. Die obigen Formeln zeigen, wie man, wenn von den drei Dingen: Senne; Winkel am Mittelpunkte; und Halbmesser zwei angegeben sind, man immer das dritte findet. Diese Bemerkung kann dienen, folgende Aufgabe aufzulösen.

§. 85. Aus dem gegebenen Halbmesser $= h$ und der Zahl der Seiten $= n$; I die Seite zum innern $= s$; II die zum äußern Vielecke $= S$ zu finden.

Auflösung. Der Winkel am Mittelpunkte, wie ACB fig. 100 für das innere, oder aCb für das äußere Vieleck, ist $\frac{1}{n} 360° = \alpha$; und folglich bekannt, weil n gegeben ist. Daher ist $s = 2h . \sin \frac{1}{2}\alpha$; wo hier der Halbmesser $= 1$, für $\sin \frac{1}{2}\alpha$ verstanden wird.

Nun ist $ab = 2Bb$ die doppelte Tangente des Winkels BCb; aber man hat $1 : \tang \frac{1}{2}\alpha = BC : Bb$; oder $1 : \tang \frac{1}{2}\alpha = h : \frac{1}{2}S$; und $\frac{1}{2}S = h . \tang \frac{1}{2}\alpha$; oder $S = 2 . h . \tang \frac{1}{2}\alpha$.

Exem-

Exempel. Die Figur soll ein reguläres Achteck werden, und der Halbmesser sey $5,75^\circ$, oder $5^\circ 7' 5''$. Der Winkel $\alpha = 45^\circ$; so ist

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \log \sin 22^\circ 30' = 0,5828397 - 1$$
$$\log 2h = \log 1150'' = 3,0606978$$

$$\log 2h + \log \sin \tfrac{1}{2}\alpha = \log s = 2,6435375$$ giebt $s = 440'',08$; oder $s = 4^\circ 4' 8''''$.

Nun ist $\log S = \log 2h + \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha$

$$\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha = 0,6172243 - 1$$
$$\log 2h = 3,0606978$$

$$\log S = 2,6879221$$ giebt $S = 487'',44$; oder $S = 48744'''' = 4^\circ 8' 7'' 4''' 4''''$.

Umgekehrt: wen s und S nebst α gegeben sind, den Halbmesser h zu finden, setzt man $h = \dfrac{s}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}$ und $h = \dfrac{S}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha}$.

§. 86. Zusatz. Wenn die Zahl der Seiten n ist, so ist der Inhalt des innern Vieleckes $= n . \triangle ABC$, und der Inhalt des äußern $= n . \triangle abC$; das erste Dreieck ist $= \frac{1}{2} h^2 \sin \alpha$ (Trig. 83); das andere ist $S . \frac{1}{2} h = h^2 . \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$;

Daher der Inhalt des innern Vieleckes $= h^2 . \frac{1}{2} n . \sin \alpha$
" " " äußern " $= h^2 . n . \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$

ihr Unterschied $= n . h^2 (\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha)$

§. 87. Aufgabe. Den Inhalt eines Dreieckes aus seinen drei gegebenen Seiten zu finden.

Auflösung. Es kömmt darauf an, in der 195ten Figur, die senkrechte CF zu finden.

Es ist aber $1 : \sin B = CB : CF$.

Es sey $CB = a$, $CF = p$; so ist $p = a . \sin B$; und der Inhalt des Dreieckes $= \frac{1}{2} p . AB$.

Es sey $AB = c$, und nun den Werth von p gebraucht, giebt das $\triangle = \frac{1}{2} a . c . \sin B$. Ich suche den Werth von $\sin B$ aus der zweiten Auflösung in (78); und setze $r = 1$.

Man hat $\cos B^2 = 1 - \sin B^2$ (Trig. 20); oder $\sin B^2 = 1 - \cos B^2$; aber $1 - \cos B^2 = (1 + \cos B).(1 - \cos B)$. Aus (78) ist $1 - \cos B$

$$= 1 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 a . c} = \frac{2ac - c^2 - a^2 + b^2}{2 a . c}$$; aber

$+ 2ac - a^2 - c^2 = -(a - c)^2$ (Rechenk. 196); daher ist der Zähler $= b^2 - (a - c)^2 = (b + (a - c)).(b - (a - c))$ (Rechenk. 182, II).

Nun ist $1 + \cos B = 1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} =$

$$\frac{2ac + c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$; hiervon ist der Zähler

$= (a + c)^2 - b^2 = ((a + c) + b).((a + c) - b)$; daher ist $(1 - \cos B).(1 + \cos B) = \sin B^2 =$

$$\frac{(b + (a - c)).(b - (a - c))}{2ac} \times$$

$$\frac{((a + c) + b).((a + c) - b)}{2ac}$$. In des ersten

Fa=

Faktors Zähler hat man $(b+(a-c)).(b-(a-c))=(b+a-c).(b-a+c)$; in des zweiten Faktors Zähler ist $((a+c)+b).((a+c)-b)=(a+b+c).(a+c-b)$.

Daher wird $\sin B^2 = \frac{(a+b-c).(b+c-a).(a+c-b).(a+b+c)}{4a^2.c^2}$;

Hieraus wird $\sin B = \frac{\sqrt{(a+b-c).(b+c-a).(a+c-b).a+b-c)}}{2ac}$.

Es ist gut, die Formel in Worten ausgedruckt zu merken. Den Zähler erhält man so: Man addire immer zwo Seiten, und ziehe von der Summe die dritte ab, das giebt drei, und zwar drei positive (Geom. 54) Faktoren, und der vierte Faktor ist die Summe aller drei Seiten. Aus diesem Produkte von den genannten vier Faktoren wird die Wurzel gezogen; dann aber diese Wurzel mit einem doppelten Produkte, aus den beiden Seiten, zwischen welchen der Winkel liegt, dividirt, giebt den Sinus dieses zwischenliegenden Winkels.

Ich heiße den Zähler w, so ist $\sin B = \frac{w}{2ac}$;

folglich der Inhalt des $\triangle = \frac{ac}{2}.\frac{w}{2ac} = \frac{w}{4}$;

auch dieser letzte Ausdruck läßt sich wieder in Worten, nach dem obigen geben, weil nur w mit 4 dividirt wird.

§. 88.

§. 88. Aufgabe. Aus zwo Seiten und dem eingeschlossenen Winkel eines Dreieckes, dessen Inhalt zu finden.

Auflösung. Der Winkel sey $= \gamma$; die Seiten sollen a und b seyn, so ist der Inhalt des Dreieckes $= \frac{1}{2} a . b . \sin\gamma$; ist aber für $\sin \gamma$ der Halbmesser oder sin tot nicht $= 1$, so wird das Dreieck $= \frac{\frac{1}{2} a . b . \sin\gamma}{\sin \text{tot}}$.

Beweis. Es werde eine der gegebenen Seiten für die Grundlinie des Dreieckes angenommen; so wird die Höhe des Dreieckes die senkrechte Linie seyn, die aus der, dieser Grundlinie gegenüberliegenden Spitze auf diese Grundlinie fällt. Es kömmt nun darauf an, für die unbekannte Höhe einen bekannten Ausdruck zu finden. Es sey im Dreiecke ABC fig 193 $BC = a$; $BA = b$ und $\measuredangle B = \gamma$ gegeben. Nun werde $BC = a$ für die Grundlinie angenommen; so ist AD die Höhe. Weil bei D ein rechter Winkel ist, so hat man $BA : AD = 1 : \sin B$; daher $AD = BA . \sin B = b . \sin \gamma$; daher $\triangle = a . \frac{1}{2} b \sin \gamma$.

II. BA werde zur Grundlinie angenommen, und die Höhe CE falle, weil A stumpf seyn soll, auf die verlängte BA; und CE wird gesucht.

Man hat nun $BC : CE = 1 : \sin B$; daher $CE = BC . \sin B = a . \sin \gamma$; und folglich wieder $\triangle = \frac{1}{2} b . a . \sin \gamma$. Wird statt 1, der sin tot gesetzt, so ist offenbar $CE = \frac{a . \sin\gamma}{\sin \text{tot}}$; und Dreieck $= \frac{\frac{1}{2} a . b . \sin\gamma}{\sin \text{tot}}$.

§. 89. Aufgabe. Aus zwo gegebenen Seiten a und b nebst einem Winkel β, der einer dieser Seiten gegenüber liegt, den Inhalt des Dreieckes zu finden.

Auflösung. Man suche vorher nach (Trig. 74) den eingeschlossenen Winkel; und dann befolge man wieder die Regeln der nächstvorigen Aufgabe.

Ich setze $b : a = \sin\beta : \sin\alpha$; welches den, der Seite a gegenüberliegenden Winkel α giebt; aber γ ist der von a und b eingeschlossene, daher $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

§. 90. Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite a mit den zwei anliegenden Winkeln β und γ den Inhalt des Dreieckes zu finden.

Auflösung. Der Inhalt des Dreieckes ist $= \frac{\frac{1}{2}a^2}{\cot\beta + \cot\gamma}$; dieses gilt, wenn beide Winkel spitz sind; ist aber einer stumpf, z. B. γ, so ist $\triangle = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\cot\beta - \cot\gamma}$.

Beweis. I. Im Dreiecke fig. 193 sey $BC = a$, $\measuredangle B = \beta$; $\measuredangle C = \gamma$ gegeben, beide sollen spitz seyn; die senkrechte AD fällt auf BC; und AD wird gesucht. Es sey $BD = y$; so ist $DC = a - y$; und AD heiße z; so hat man (☉) $z : y = (\sin \text{tot} = 1) : (\tan BAD = \cot\beta)$; hieraus wird $z = \frac{y}{\cot\beta}$.

(☽) $z : a - y = 1 : (\tang CAD = \cot\gamma)$ aus ⊙ und ☽ wird $y : a - y = \cot\beta : \cot\gamma$ (Rechenk. 361), und hieraus wird $(y + a - y = a) : y = \cot\beta + \cot\gamma : \cot\beta$ (Rechenk. 352); folglich

$$\frac{a . \cot\beta}{\cot\beta + \cot\gamma} = y.$$ Dieser Werth von y wird bei dem Werthe für z gebraucht, und so ist $z =$

$$\frac{a}{\cot\beta + \cot\gamma}$$; aber der Inhalt des $\triangle = \frac{1}{2} a . z$

$$= \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot\beta + \cot\gamma}.$$

II. Es sey $AB = b$ gegeben, nebst $\angle B = \beta$ und dem stumpfen Winkel BAC, welcher auch γ heißen soll, und $EC = x$ wird gesucht. Die Verlängung AE der Grundlinie heiße y; so ist $CE : AE = 1 : (\tang ACE = \cot CAE)$; oder $x : y = 1 : \cot CAE$; und hieraus wird $x =$

$$\frac{y}{\cot CAE}.$$ Ferner ist $x : b + y = 1 : (\tang BCE = \cot\beta)$; folglig $b + y : y = \cot\beta : \cot CAE$; und hieraus $b + y - y : y = \cot\beta - \cot CAE : \cot CAE$; folglich $$\frac{b . \cot CAE}{\cot\beta - \cot CAE} = y.$$

Nun ist $\triangle = \frac{1}{2} b . x$; folglich $\triangle = \frac{1}{2} b .$
$$\frac{b . \cot CAE}{(\cot\beta - \cot CAE) . \cot CAE} = \frac{\frac{1}{2} b^2}{\cot\beta - \cot CAE}.$$

Begreiflich ist $\cot CAE = - \cot\gamma$; wollte man nun

nun hier statt — cot CAE setzen + cot γ, wie dieses für sich wahr ist; so hätte dieser Werth des Dreieckes mit dem in I einerlei Nenner; da aber a und b verschieden sind, so gäbe das, für das nämliche Dreieck, verschiedene Werthe, welches widersprechend ist.

Die Lage der positiven und negativen Tangenten und Cotangenten hat, für den gegenwärtigen Fall, unstreitig im zweiten Quadranten statt, und da ist entweder der Mittelpunkt, oder der, in ihm errichtete senkrechte Halbmesser die Grenze des Uibergangès vom Positiven ins Negative. Dieses hat seine Richtigkeit, wenn man in dem Dreiecke den Punkt A zum Mittelpunkte annähme; aber da wird AE seiner Natur nach negativ, und müßte so in der Rechnung gebraucht werden; denn dieses hängt genau zusammen.

Aber man brauchte in der Rechnung das y als positiv; so muß denn auch die cot γ im umgekehrten Sinne, als sie es ihrer Natur nach nicht ist, genommen werden. Auch kann man die Sache so vorstellen:

Man brauche y als negativ, wie es ein solches seiner Natur nach ist, so muß man gewiß cot CAE in den obigen Proportionen negativ setzen, weil ja y statt dieser Tangente steht; und das gäbe $x : -y = 1 : -\cot CAE$ und $+x = \frac{-y}{-\cot CAE}$; auch wäre $x : b + (-y) = 1 : \cot \beta$; und aus beiden Proportionen erhält man $b - y : -y = \cot \beta : -\cot CAE$, und $b - y - (-y) : -y = \cot \beta + \cot CAE$

CAE : $-$ cot CAE; oder b : $-$ y $=$ cot β $+$ cot CAE : $-$ cot CAE; folgl. $\frac{b. - \cot CAE}{\cot \beta + \cot CAE}$ $= -$ y; und dieser Werth in die Gleichung für $+x$ gesetzt, giebt $+ x = \frac{b}{\cot \beta + \cot CAE}$; aber nun ist $+ \cot CAE = - \cot \gamma$; folglich erhält man den Inhalt des $\Delta. = \frac{\frac{1}{2} b^2}{\cot \beta - \cot \gamma}$.

Daß aber der Nenner positiv sey, folgt daraus, weil $\sphericalangle$ CAE, dessen Cotangente man ohnehin nehmen muß, größer ist, als $\sphericalangle$ ABC (Geometrie 75); daher ist $\cot \beta > \cot \gamma$. Auch ist allemal der Nenner hier kleiner, als in I, wie er das seyn muß, weil auch $b < a$ ist (Geom. 80, II).

§. 91. Aufgabe. Ein Parallelogramm auszurechnen, wenn entweder I ein Winkel nebst zwo anliegenden Seiten; oder II wenn zwo anliegende Seiten, nebst der Diagonale gegeben sind.

Auflösung. I. In der 196ten Figur sey AB und AD gegeben, und entweder der Winkel A, oder B; weil nach (Trig. 80) einer den andern bestimmt.

Es heiße AD $=$ f; AB $=$ g; man sucht DE.

Man hat 1 : f $=$ sin A : DE; oder DE $=$ f. sin A; daher der Inhalt des Parallelogramm $=$ g . f . sin A.

II. Dieser Fall ist ganz mit dem in der Aufgabe (Trig. 87) einerlei; und so ist das Parallelogramm

gramm $= 2\,\Delta\,\frac{w}{2}$, weil f, g, und die Diagonale $=$ d gegeben ist.

§. 92. Aufgabe. Den Inhalt einer irregulären Figur zu finden.

Auflösung. Als Beispiel kann die 84te Figur dienen.

Erster Fall. Wenn alle Seiten der Figur, und die nöthigen Diagonale, die die Figur in △△ abtheilen, gegeben sind. Man berechnet sodann jedesmal ein Dreieck nach dem andern (völlig nach Trigonom. 87), und bringt die Inhalte aller Dreiecke in eine Summe.

Zweiter Fall. Wenn alle Seiten, und alle Winkel weniger drei aufeinander folgenden, gegeben sind. So seyen in der Figur die ∢ A, F, E nicht gegeben.

1) Der Inhalt des Dreieckes DCB läßt sich nach (Trig. 88) finden.

2) Man suche im △ DCB nach (77) den Winkel BDC, und die Seite DB, so hat man den Winkel EDB $=$ ∢ EDC $-$ ∢ BDC; und man kann den Inhalt des Dreieckes EDB entweder nach (88) finden, oder man kann sich, weil man doch zur Berechnung des △ EBA, die Seite EB, und den ∢ ABE $=$ ∢ ABC $-$ ∢ EBD $-$ ∢ DBC, haben muß), einer andern Methode bedienen.

3) Verfährt man mit dem △ ABE (welches hier das zweitletzte seyn soll), wie mit den vorigen;

 nur

nur daß man nebst seinem Inhalte noch die Seite EA berechnet, so hat man im letzten Dreiecke alle drei Seiten, und sein Inhalt läßt sich daraus finden.

Einige Anwendungen der Trigonometrie zu Feldvermessungen.

§. 93. Daß man bei trigonometrischen Anwendungen Winkel der zu messenden Feldstücke müße messen können, um sie so in Graden und Theilen des Grades zu haben, zeigen die sämtlichen trigonometrischen Aufgaben.

Zum Winkelmessen hat man zwar von jeher verschiedene Werkzeuge gebraucht, wovon aber immer die gewöhnlichen Astrolabien, wovon (Geom. 275, II) Erwähnung geschah, die besten und die einfachsten, wiewohl nicht immer die wohlfeilsten sind. Man hat an den neuern Nonius (Kleinmesser) angebracht, wodurch man bei vielen ausser den ganzen Graden, welche gewöhnlich nur auf der messingenen Zirkelplatte angebracht sind, noch im Stande ist 30te Theile des Grades, oder von 2 zu 2 Minuten, bei einigen sogar, bei denen nämlich die Haupteintheilung schon bis auf halbe, oder viertel Grade geht, einzelne Minuten abnehmen kann. Bei Vorzeigung eines solchen Winkelmessers ist sogleich dieser Gebrauch begriffen. Um die trigonometrischen Anwendungen begreiflich zu machen, will ich die Fälle in (Geom. 277 u. f.) hier betrachten.

I. Die Weite AB in fig. 106 trigonometrisch zu messen, wird der Winkel C, und die zwo Seiten

ten CA, und CB gemessen, und hieraus wird AB nach der Vorschrift (Trig. 77) gefunden.

II. Wäre AB in der 107ten Figur bei den in (Geom. 278, II) vorhandenen Hindernissen zu messen, so würden die Winkel A und C gemessen, und man hat dadurch den Winkel B (Geom. 106); und AB wird nach der Vorschrift (Trig. 73) gefunden; indem man setzt sin B : A C = sin C : AB.

III. Die Höhe AB fig. 109 zu messen. Man stelle den Winkelmesser vertikal, nach eben den Masregeln, die in (279, II) gegeben sind, und messe den Winkel B C A; dann auf dem zweiten Standpunkte B D A, oder B D C, weil einer den andern bestimmt (Geom. 45); die Linie C D wird mit einem bekannten Längenmase gemessen. Und so hat man sin D B C : C D = sin B C D : B D; und hieraus wird B D bekannt. Und weil angenommen wird, A sey ein rechter Winkel, so hat man: (sin A = sin tot) : B D = sin B D A : B A.

IV. Um eine ganze Gegend, oder eine vielseitige Figur trigonometrisch aufzunehmen, ist es sehr gut, daß man sich Standorte wählt, aus welchen man viele merkwürdige Punkte innerhalb, und viele Grenzpunkte der Figur sehen könne. Die Umstände solcher Oerter sind immer bei andern Lagen anders; es wird daher immer eine richtige Vorkenntniß dieser Lokalumstände erfodert, die man erhält, wenn man die Gegend ganz bereißt, und beobachtet, wo die vortheilhaftesten Standorte zu nehmen sind. Dann ist es auch sehr zu rathen, sich eine Handzeichnung zu machen, worinn alle Winkelpunkte der Figur eine Lage haben, wie sie beiläuftig in der Figur haben; diese Handzeichnung

wird, entweder während der Aufnahme, oder besser vorher gemacht, woraus man sieht, ob man alle nöthige Winkel gemessen habe. Als ein Beispiel, diene die 197te Figur, worinn einigermaßen gezeigt werden kann, wie man sich bei dergleichen Vermessungen zu verhalten habe.

1) Ich nehme an, man habe einen Standort S gefunden, aus welchem man viele merkwürdige Punkte der Figur sehen, und die Winkel aus S zu diesen Punkten messen könne; und die hier, wie es die Zeichnung darstellt, als gemessen, angenommen werden.

2) In A sollen die Winkel SAK, und SAB gemessen werden; auch die Standlinie SA werde gemessen. Aus diesen Dingen lassen sich im △ ASB die Seiten AB, und BS finden (73).

3) Ich nehme an, man lege die Linien ab und bc an den Fluß, daß sie in m und n denselben berühren; und man messe auf diesen Linien die erfoderlichen senkrechten Linien, um die Krümmung des Flußes zu haben; begreiflich wird hier die Krümmung gesucht, um sie in einer Zeichnung darzustellen, wo sich dann die Breite des Flußes von selbst giebt, weil so seine beiden Ufer ihre Lage in solcher Zeichnung erhalten (286). Da man aber diese Linien ab, bc nach der eben genannten Methode messen muß, so können ihre Maße zugleich bei den trigonometrischen Berechnungen gebraucht werden.

4) Man messe in C die Winkel SCB, SCa, und weil in (2) SB berechnet ist, so werden nun zuerst im △ SBC die Linien BC; SC durch Rechnung gesucht; aus SC aber und den beiden Winkeln bei C und S das Uibrige des △ CSa gefunden.

5)

5) Aus der gemessenen ab (3), und der in (4) berechneten Sa, nebst dem Winkel aSb wird im △ Sab die Seite Sb gefunden.

6) Ich nehme an, aus S habe es sich nicht thun lassen, die Winkel nach c und H zu messen; daher werden in I die Winkel KIS, SIT, TIH gemessen.

7) Aus (2) ließ sich im △ ASK die Seite SK aus den Winkeln bei A und S berechnen. Diese SK, nebst den Winkeln KIS, ISK sind nun die Stücke, die im Dreiecke ISK zur Berechnung der Seiten IS und IK gebraucht werden können.

8) Im Dreiecke IST sind die Winkel bei S und I, nebst der Seite IS bekannt, woraus sich IT und ST finden lassen; und hierdurch wird die Lage des Objektes T bekannt.

9) In H sollen die Winkel IHT, THb, bHc gemessen werden; so kann man im △ IHT, aus der in (8) gefundenen IT; und den Winkeln bei I und H, die andern zwo Seiten HI, und HT finden.

10) In (5) ist Sb gefunden, und in (8) ST; folglich sind im △ bTS zwo Seiten, nebst dem eingeschlossenen Winkel TSb bekannt, woraus sich Tb finden läßt.

11) Im △ HTb sind die Seiten HT (9); Tb (10) nebst dem Winkel THb bekannt; folglich läßt sich Hb finden.

12) Die durch Rechnung gefundene Hb, und die in (3) gemessene bc, nebst dem Winkel bHc sind die Stücke im △ bHc, woraus sich Hc finden läßt.

13) Ich nehme an, daß auf der rechten Hand des Flußes sich in der Fläche der Figur solche Hindernisse finden (wie, wenn es etwa eine waldigte, oder hügeligte Gegend wäre) die nicht verstatten, daß man irgend durch die Fläche Winkel absehen könne; nur sind die Linien d e, und e f wie in (3) gelegt, und gemessen; wo de in r den Fluß berührt.

14) Der Winkel e d D, nebst der Linie d D werde gemessen.

15) Es werde ferner der Winkel D, und DE gemessen, so lassen sich im $\triangle$ dED aus zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel die übrigen drei Stücke finden.

16) Weil der Winkel EdD aus (15) bekannt ist, so ist $\sphericalangle$ edE = $\sphericalangle$ edD − $\sphericalangle$ EdD; folglich wird im $\triangle$ edE sowohl die Seite eE, als auch der Winkel eEd sich finden lassen.

17) Der Winkel FED werde, nebst der Seite FE gemessen; so hat man $\sphericalangle$ FEe = $\sphericalangle$ FED − $\sphericalangle$ DEd − $\sphericalangle$ dEe, wo die zwei leztern aus (15 und 16) bekannt sind; daher läßt sich aus eE; $\sphericalangle$ FEe und FE alles übrige im $\triangle$ FEe finden.

18) Man messe den Winkel fGF und die Seiten fG und GF; so wird aus diesen Stücken die Rechnung das Uibrige, im $\triangle$ fGF geben.

19) So hätte man nun ef nach (13) gemessen; eF in (17) und Ff in (18) durch Rechnung gefunden; und man könnte im $\triangle$ fFe aus den so bekannten drei Seiten die Winkel berechnen.

20) Die Lage des Objektes P zu finden, würde ich rathen, daß man von P anfienge, in gerader Richtung nach der Grenze zu messen. Die Richtung sey PQ, wo man freilich itzt den Punkt Q noch nicht weiß, der sich aber im Schnitte der EF mit dieser Richtung PQ geben wird. Es wird sich thun lassen, den Winkel PQF zu messen; daher hat man im △ PQF die drei Stücke PQ; QF, und ∢ PQF, und die übrigen Stücke; auch etwa die senkrechte Weite des Objektes P von QF läßt sich finden.

Anmerk. Der eben beschriebene einzelne Fall hat wenigstens so viel Mannigfaltigkeit, als ein Beispiel zu haben braucht, woraus der Praktiker lernen kann, welche Vorsicht er bei trigonometrischen Messungen nöthig habe; sowohl um alles Erforderliche genau zu messen, als auch, um die Sache mit Vortheile, die viele Abkürzungen gewähren, zu verrichten. Es ist auch zu rathen, daß während der Messungen Proben angestellt werden, ob man nämlich alles genau gemessen, und berechnet habe; darzu kann dienen, daß man Winkel oder Linien nachmesse, und zusieht, ob die berechneten Dinge mit denen übereinkommen, wie sie die Messung unmittelbar giebt.

Will man einen Grundriß der Figur verfertigen, so scheint die Methode, jedes Dreieck der Figur aus seinen drei Seiten einzuzeichnen (Geom. 174, I), die zu seyn, welche am wenigsten Fehler giebt; man hat daher bei der Berechnung dahin zu sehen, die erfoderlichen Seiten zu finden.

Anmerk. Messungen von ganzen Provinzen und Staaten, um solche auch in Grundrisse (Landkarten) zu bringen, werden zwar auch nach trigonometrischer Methode verrichtet; allein es kommen dabei noch weit mehr Umstände in Betracht. So muß auf die

geo=

geographische Länge und Breite vorzüglich gesehen, und dieselbe daher aus Sternbeobachtungen berichtigt werden. Imgleichen werden die Verzeichnungen nicht planimetrisch, wie kleinere Figuren z. B. einzelne Gemarkungen u. d. gl. verfertigt, sondern sie müßen nach den sogenannten stereographischen Projektionen gemacht werden. Man sieht hieraus, daß hier keine Weisung zu solchen Messungen könne gegeben werden. Wer die gehörigen Vorkenntnisse von Astronomie, und mathematischer Geographie besitzt, kann unter andern in folgenden Schriften Belehrung finden: *Du Cam de Montesson* die Kunst alles in Riß zu legen, aus dem Französischen übersetzt, Dresden und Leipzig 1781. Helfenzrieder, Geodäsie XIV Kapitel. Joh. Tob. Mayer, gründlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, III Theil XXXII Kap.

Auch verdient, besonders wegen der niemal außer Acht zu setzenden Richtigkeit und Schärfe im Messen und Sternbeobachten, *Maupertuis* de figura telluris gelesen zu werden.



Druckfehler.

Seite,	Zeile,	anstatt,	lies
13	12	BCD	ACD
das.	14	EF	GF
das.	21	EFE	GFG
18	nach der vierten Zeile setze hinzu : die sich wie in (I) berühren		
20	27	Nonin's	Nonius
24	18	EF	E; F
26	6	ac=bc	ab=ac
28	7	ac	bc
30	4 von unt.	BF	CF
31	4 von unt.	CB	AB
33	5	∢DCF=∢ECF	∢DFC=∢EFC
36	19	ED	Punkte E; D
45	12	näher	näher an HD
47	12	$o+p$	$o+q$
das.	18	$r=180°-o-p$	$o=180°-p-q$
das.	20 u. 21	statt r wird q gesetzt	
54	3	≅ △ DCB	≅ △ DCE
63	14	A, B, C	A, B, D
71	17	FA par. EH	FH par. EG
78	2	□ ABDE	$\frac{1}{2}$ □ ABDE
das.	13	LEHC	LKHC
das.	15	GE	DE
100	6 v. unt.	$(AE=\alpha\beta):CB$	$(AE=\alpha\beta):C\beta$
102	15	△ EBD	CBD
110	vorletz. Z.	∢ agf	∢ ahf
116	3 v. unt.	EI	EG
122	17	CF^2	AF^2

Seite,	Zeile,	anstatt,	lies
125	letz. Z.	$\frac{DB}{\frac{1}{2}B} < m$	$\frac{DB}{\frac{1}{2}B} > m$
131	3 v. unt	bm=md	bn=nd
135	12	ph	pb
146	letz. Z.	$339228''''$	339292420^{VIII}
147	1	678456^{V}	678584844^{VIII}
das.	4	$1°86'21''12$	$18°32'17''90'''78''''80^{V}$
das.	9	$72+40''+3'$	$72°+40'+3''$
155	7 v. unt	(19)	(§313)
189	14	senkrecht, aber	senkr. auf GE; aber
198	23	gedeckten	gedachten
234	3 u 4	Grundseite	Grundfläche
das.	18	$\frac{1}{2}P : p$	$\frac{1}{2}P : \frac{1}{2}p$
235	12	Pris γ : Pris δ : c : d	Pris γ : Pris δ = c : d
265	10	$B\alpha C\nu\mu$	$\beta\alpha C\nu\mu$
267	12	einmal	niemal
269	21 u 22	oder AB 2mal;	wird nicht gelesen
281	2	AC	Ac
287	letz.	$\frac{1}{3}P.(2r^3-2ar^2+3a^2r-a^3)$	$\frac{1}{3}P(2r^3-3a^2r+a^3)$
315	6 v. unt.	oder	der
325	6	CB	CA
336	30	Müller; Regiom.	Müller Reg.
338	7	2	3
341	9	$\cos\beta.\cos\alpha \sin\beta.\sin\alpha$	$\cos\beta.\cos\alpha-\sin\beta.\sin\alpha$
342	13	$\sin n.\sin\alpha+\sin\alpha.\cos n$	$\sin n.\cos\alpha+\sin\alpha.\cos n$
das.	17	$\sin\theta.\sin\alpha+\sin\alpha.\cos\theta$	$\sin\theta.\cos\alpha+\sin\alpha.\cos\theta$
346	10	$\frac{r.\sin\gamma-\alpha)}{\cos\gamma-\alpha}$	$\frac{r.\sin(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma-\alpha)}$
349	6	α^2	$\cos\alpha^2$.

Seite,	Zeile,	anstatt,	lies
350	15	$r = \left(\frac{r^2 - r.\cos 2\alpha}{r + \cos 2\alpha}\right)$	$= r.\left(\frac{r^2 - r.\cos 2\alpha}{r + \cos 2\alpha}\right)$
356	5	$\frac{\cos\varphi}{\cot\varphi}$	$\frac{\sec\varphi}{\cot\varphi}$:
375	18	34,695	34,685
377	22	9,9230874	9,9260874
das.	23	56°53′+″	57°0′+″
382	4 v. unt.	$\frac{1}{2}(A+C)\frac{1}{2}(A-C)$	$\frac{1}{2}(B+C)\frac{1}{2}(B-C)$

Anmerkung.

Es ist zu rathen, daß die angezeigten Druckfehler vor der Durchlesung des Buches, an den bemerkten Stellen, wenigstens durch ein hingesetztes Zeichen, angedeutet werden, um sich die Verlegenheit bei der Durchlesung zu ersparen, in welche Druckfehler den Leser setzen können. Es ist schon oft gesagt worden, daß bei Büchern dieser Art, Druckfehler unvermeidlich sind, und diese schlimme Wahrheit hat auch hier, bei angewandter sorgfältiger Korrektur, doch statt haben müßen. Aber so wahr das, leider! ist, so gewiß ist es auch, daß in keiner Art Bücher die Druckfehler mehr Nachtheil, als in mathematischen haben. Vielleicht sind noch einige übersehen worden, die aber der etwas geübte Leser leicht entdecken wird.

Seite,	Zeile,	anstatt,	lies
350	15	$r=\left(\frac{r^2-r.\cos 2\alpha}{r+\cos 2\alpha}\right)$	$=r.\left(\frac{r^2-r.\cos 2\alpha}{r+\cos 2\alpha}\right)$
356	5	$\frac{\cos\varphi}{\cot\varphi}$	$\frac{\sec\varphi}{\cot\varphi}$
375	18	34,695	34,685
377	22	9,9230874	9,9260874
das.	23	56°53′+″	57°0′+″
38[illegible]	4 v. unt.	$\frac{1}{2}(A+C)\frac{1}{2}(A-C)$	$\frac{1}{2}(B+C)\frac{1}{2}(B-C)$
3[illegible]	13	und nach der Annahme ... bis an: aber in der 15ten Zeile wird nicht gelesen.	
das.	17	nach (43 III) setze hinzu: Nun ist im △ cm∂ der ∢ c∂a < bc∂ (75)	
12	3	3 v. unt. in willkürlicher Lage; lies: in senkrechter Lage auf AC.	
20	9	ist also für sich jedesmal kleiner; lies: ist schon für sich jedesmal größer.	
21	8	kleiner; lies: größer	
37	24	50000 × 100000 = log 50000 + log 100000; lies: 50000 × 100000; also sein Logar. = log 50000 + log 100000.	

Anmerk. Es ist zu rathen, daß die angezeigten Druckfeler vor der Durchlesung des Buches, an den bemerkten Stellen, wenigstens durch ein hingesetztes Zeichen, angedeutet werden, um sich die Verlegenheit bei der Durchlesung zu ersparen, in welche Druckfehler den Leser setzen können. Es ist schon oft gesagt worden, daß bei Büchern dieser Art, Druckfehler unvermeidlich sind, und diese schlimme Wahrheit hat auch hier, bei angewandter sorgfältiger Korrektur, doch statt haben müßen. Aber so wahr das, leider! ist, so gewiß ist es auch, daß in keiner Art Bücher die Druckfehler mehr Nachtheil, als in mathematischen haben. Vielleicht sind noch einige übersehen worden, die aber der etwas geübte Leser leicht entdecken wird.

Proporzionnal Linie zu f...

2 4 8

$2 : x = x : 8$

4

$2x^2$

Auflösung. Die gegebenen Lin...
ss, trage sie auf eine gerade ...
sie und nehme die Hälfte als ...
damit einen ~~halbkreis~~ Zirkel ...
Linie ad so ist diese die mittlere ...

Beweis. Weil das △ adb ∾ ...
(nach §. 34.) $bd : da = da : cd$

$S = \frac{4}{3}\pi r^3$ $r = 3$ $\pi = 3,$...

$r = 27$

3,141

27

108

$S = \frac{1}{2} r^2 \pi$

$r = 5\frac{1}{3}$

256

3,141

[illegible] einen andern [illegible]

[illegible] proportionallinie zu finden.

[illegible]

a

b

c d

[illegible] den Mittelpunkt der ganzen [illegible], errichte den Perpendikel [illegible] so ist ab die gesuchte Linie, oder ba : bd, und die Sehne ac ist cd die mittlere Proportionallinie

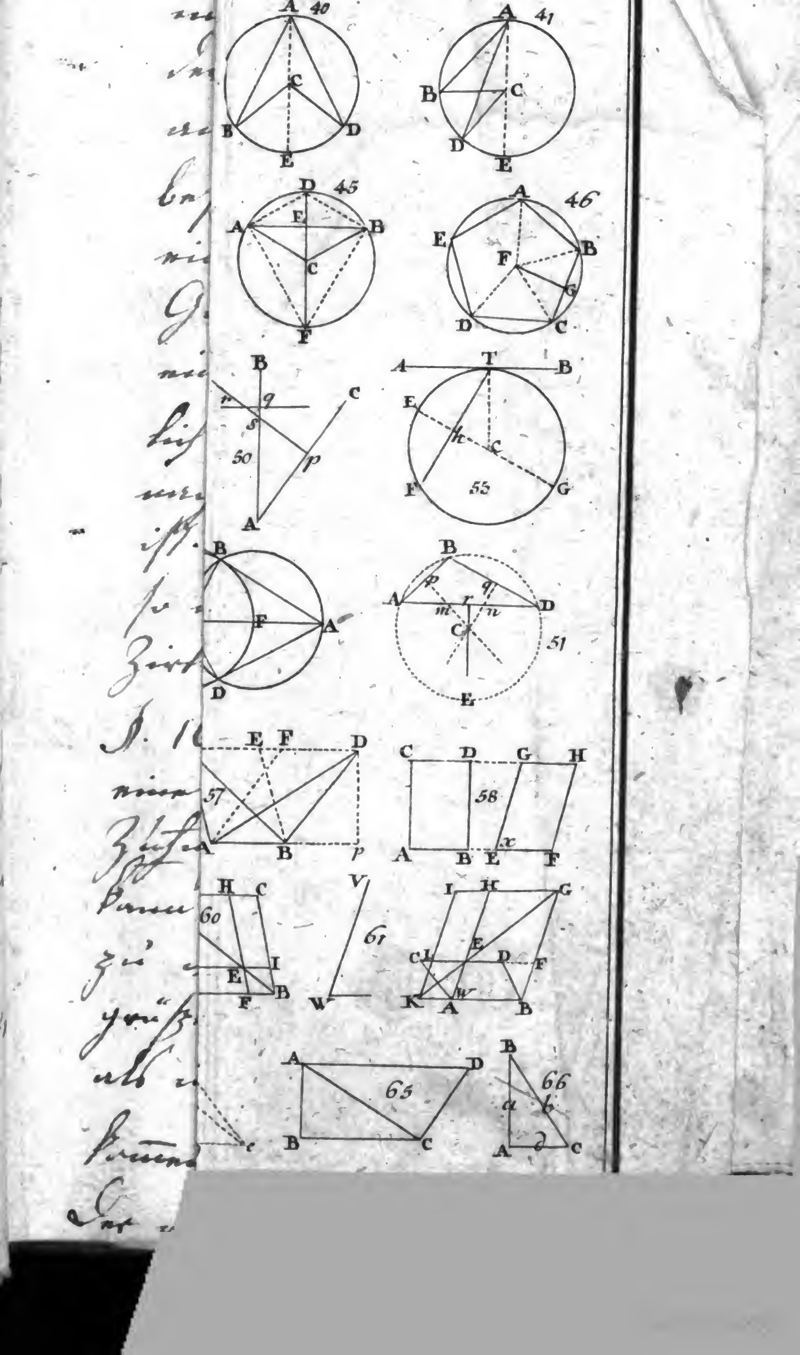
ac : cd od. bd : ac : cd.

[illegible] a, b, c, d proportional sind, und man sucht zwischen a und b und d die mittlere Proportionallinie [illegible] folgen aus den Proportionen

und $c : n = n : d$ od. $a : m : b = c : n : [illegible]$

$= m^2 : b$

$[illegible] \cdot 2\, d)^2$


40
41
45
46
50
55
51
57
58
60
61
65
66

… so erhellt sich daraus schliessen, daß
… ähnlich, und die Seiten proportional

Dreyecke proportionirte Seiten haben,
… ähnlich, nämlich die gleichen ∠
… liegenden Seiten gegenüber.

… Dreyecken ABC und EDF die
Seiten proportionirt.

… H, ∠i = I, so ist auch ∠k = ∠K.
… ist Δ EGF ∽ Δ ABC und ist
… : EF so wie angenommen
… : EF
… F = DE : EF
= EF : EF
… DE

$m^2 : b^2 = n^2 : d^2$ od. $a : m = c : n = m$

sich $a : m = n : d$ man kann also ein

mittleren Glieder b, c die gesuchten

z. B. wenn $a = 2$, $b = 8$, $c = 10$, $d = 40$

also $2 : 4 = 4 : 8$, $10 : 20 = 20 : 40$ …

Sucht man zwischen 2 Linien a in

Proportionallinie e, ferner zwischen

c, e die linien c, g dann zwischen a, c

die Linien b, d, f, h so erhält man

dann 7, dann 15 Proportionallin.

n Operationen erhält $2^n - 1$ mittl.

dann $1 = 1$

$1 + 2 = 3$

$1 + 2 + 2^2 = 7$

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$ also

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ 2^{n-1}$ die

ist $= 2^n - 1$

... wenn sie einander ... Tr. ...

... einer Seite parallel gezogen wird, so theilt dieselbe die beyden andern Seiten in ~~...~~ proportionirliche Theile

... Es sey im Tr. abc, de parallel mit bc, alsdann wird ad : db : ab = ae : ec : ac

... bde = Tr. dec, weil sie gleiche Grundlinie und Höhe haben. Also ist auch Tr. abe = Tr. acd.

Die Tr. ade, bde, abe verhalten sich wie die Grundlinien, weil diese in einer Linie ab liegen, und ihre Spitzen in e zusammen fallen (§.). Eben so gilt es von den Tr. ade, edc, ade.

Tr. bde : Tr. abe = ad : db : ab

dec : Tr. acd = ae : ec : ac.

... untereinander stehenden Tr. gleich ... auf der letzten Seite der Gleichheit beyder Proportionen die Verhält... also auch auf der ersten Seite

= ae : ec : ac

... ab = ...